



Universidad Nacional  
del Nordeste

**Universidad Nacional Del Nordeste - UNNE**

**Facultad de Ingeniería**

**MECÁNICA COMPUTACIONAL APLICADA AL ESTUDIO DE  
MATERIALES COMPUESTOS DE MATRIZ FRÁGIL  
REFORZADO CON FIBRAS CORTAS**

**UBERTI BRUNO**

**RESISTENCIA, CHACO  
2012**

## AGRADECIMENTOS

*A Dios.*

*Por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.*

*Debo agradecer de manera especial al Ingeniero Magister Ricardo Barrios D'ambra por aceptarme para realizar este trabajo bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de este trabajo.*

*Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento al Dr. Ignacio Iturrioz por su importante aporte y participación en el desarrollo de este trabajo. No cabe duda que su participación ha enriquecido el trabajo realizado.*

*A todos los miembros y amigos del Departamento de Mecánica Aplicada: Ricardo, Juan Manuel, Javier, Ariel, Pablo y Hector por el apoyo constante durante gran parte de la carrera.*

*A mi familia.*

*Sin su apoyo, colaboración e inspiración habría sido imposible llevar a cabo esta dura carrera. A mis padres, Patricia y Enrique, por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo perfectamente mantenido a través del tiempo; a mis hermanas Agostina y Fiorenza por su paciencia y acompañamiento.*

*Mis abuelos Irma, Coco, Nely y Edgar, por quererme y apoyarme siempre.  
¡Gracias a ustedes!*

*Y a todos mis amigos por compartir los buenos y malos momentos!*

## RESUMEN

Los materiales compuestos han surgido como respuesta a las cada vez más exigentes condiciones de proyecto. Los mismos consisten en la combinación de dos o más materiales distintos con el objetivo de conseguir un nuevo material cuyas propiedades resulten superiores (más fuertes, tenaces o durables) que las de cada uno de sus componentes en forma individual.

Estos materiales, encuentran constantemente nuevas aplicaciones en el campo de reparaciones y readaptaciones de estructuras en la construcción civil, y también son ampliamente usados en otros campos como ser el automotriz, naval, aeronáutico, aero-espacial, industrias eólicas, e incluso en aplicaciones recreativas.

En este marco, el desarrollo de la capacidad de prever la falla de los materiales compuestos, se ha convertido en una tarea prioritaria.

Existen dos motivaciones principales para el desarrollo de modelos computacionales que relacionen los parámetros microestructurales con el comportamiento mecánico del compuesto.

Una de ellas es conducir la optimización del comportamiento de materiales por medio del ajuste de tipos y formas de los componentes constituyentes, y la otra es predecir la respuesta mecánica final de los productos fabricados con dichos materiales

Trabajos recientes demuestran las limitaciones que en muchos casos presentan los criterios de falla clásicos, y la necesidad de avanzar en el desarrollo de nuevas propuestas de criterios de falla que involucren nuevas variables macro mecánicas que los mecanismos de falla a nivel micro mecánico revelen como representativas.

Alineado con lo aquí expuesto en el presente trabajo se estudia el comportamiento mecánico de un material compuesto formado por fibras cortas distribuidas aleatoriamente, para ello se utiliza una versión del método de los elementos discretos formados por barras ( Discrete Element Method DEM). Este método permite simular el comportamiento mecánico hasta la ruptura de sistemas que fallen en forma frágil o cuasi-frágil. Utilizando el DEM, en este trabajo se obtiene la respuesta de un sistema constituido por una única fibra que vincula una matriz fisurada para diferentes ángulos entre la fibra y la fisura y la orientación de la carga aplicada. Estas respuestas son posteriormente superpuestas con la metodología presentada originalmente por otros autores.

Posteriormente se discuten las conclusiones sobre los resultados obtenidos así como las potencialidades de la metodología empleada.

# ÍNDICE

<b>CAPITULO 1 - INTRODUCCIÓN</b> .....	1
Objetivos:.....	4
Objetivos generales:.....	4
Objetivos particulares: .....	4
<b>CAPITULO 2 - REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA</b> .....	5
Introducción .....	5
2.1 Mecanismos de aumento de tenacidad.....	6
2.1.1 Aumento de tenacidad por microfisuras .....	6
2.1.2 Compuestos reforzados por partículas.....	7
2.1.2.1 Compuestos reforzados con partículas grandes.....	7
2.1.2.2 Compuestos reforzados por dispersión.....	7
2.1.3 Compuestos reforzados por whiskers .....	7
2.1.4 Compuestos reforzados por fibras .....	8
2.2 Aumento de la tenacidad de materiales compuestos reforzados por fibras .....	8
2.3 Modelos matemáticos para calcular el aumento de la tenacidad de materiales compuestos reforzados por fibras .....	11
2.4 Procesos de ruptura de materiales compuestos.....	14

2.5 FUNDAMENTOS TEORICOS DE MECÁNICA DE FRACTURA .....	16
2.5.1 Introducción a la mecánica de fractura .....	16
2.5.2 Mecánica de fractura lineal elástica (MFLE) .....	17
2.5.3 Balance energético de Griffith.....	18
2.5.4 Tasa de energía liberada, G.....	20
2.5.5 Análisis de tensiones en las proximidades del extremo de una fisura .....	20
2.5.6 Factor de intensidad de tensiones .....	22
2.5.7 Relación entre K y G .....	24
<b>CAPÍTULO 3 - MATERIALES Y MÉTODOS .....</b>	<b>26</b>
3.1. Modelo teórico del problema estudiado – PROPUESTA DE Li et al [33] .....	26
3.1.1 Fisura .....	26
3.1.2 Fibras .....	26
3.1.3 Delimitación de las dimensiones y funciones de distribución de fibra .....	27
3.1.4 Layout de la fibra en relación a la superficie de la fisura .....	28
3.1.5 Fibra sin deformación.....	28
3.1.6 Tensión de puente proveniente de las fibras en el plano de la fisura.....	30
3.1.7 Aumento de energía de fractura $G_c$ .....	30
3.2. METODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS.....	31
3.2.1. Características de la formulación del método utilizada en este trabajo.....	32
3.2.1.1. Rigidez de las barras equivalentes al continuo.....	32
3.2.1.2. Masas nodales.....	37
3.2.1.3. Solución de la ecuación de equilibrio.....	37
3.2.1.4. Relación constitutiva de la barra para modelar la rotura del material.....	38
3.2.2. Integración por diferencias finitas .....	40
3.2.3. Metodología utilizada para obtener el tensor de tensiones .....	41
3.2.3.1. Tensiones normales .....	42

3.2.3.2. Tensiones tangenciales .....	43
3.2.4. Problemas verificados con el MED .....	44
<b>CAPÍTULO 4 - PROBLEMA EN ESTUDIO - MODELO FÍSICO .....</b>	<b>45</b>
<b>CAPITULO 5 - METODOLOGIA – .....</b>	<b>49</b>
<b>IMPLEMENTACIÓN EN EL MED .....</b>	<b>49</b>
5.1 Configuración geométrica.....	49
5.2 Discretización con el MED – MODELO NUMÉRICO .....	50
<b>CAPITULO 6 - RESULTADOS .....</b>	<b>53</b>
6.1 Relación entre la fuerza de puente y apertura de fisura.....	54
6.2 Tensión en el compuesto y tenacidad a la fractura. ....	62
6.3 Análisis de los procesos de ruptura en materiales compuestos .....	63
<b>CAPITULO 7 - CONCLUSIONES .....</b>	<b>68</b>
<b>CAPITULO 8 - REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>70</b>

## CAPITULO 1 - INTRODUCCIÓN

La aplicación industrial de materiales compuestos ha crecido ampliamente en los últimos 40 años, debido principalmente a las excelentes propiedades mecánicas que presentan. En el mismo período, un gran esfuerzo teórico se ha invertido en la modelización numérica de materiales compuestos y en el desarrollo de una base matemática para una descripción de sus complejas propiedades micro y macro mecánicas, produciéndose por tanto, una gran cantidad de literatura científica sobre modelos cuantitativos para estos materiales.

El diseño industrial de piezas estructurales realizadas con materiales compuestos requiere formulaciones teóricas y herramientas informáticas que modelen adecuadamente el comportamiento de estos materiales.

Durante la década de 1960 se presentaron un conjunto de métodos de cálculo alternativos, que no utilizaron ecuaciones diferenciales o integrales para describir el problema en su dominio espacial. Diferentes métodos surgieron dependiendo del elemento individual introducido, tales como partículas o barras. En el proceso, surgió un método que fue denominado por Munjiza (2009) "la mecánica computacional del discontinuo ", y ahora es una parte integral de la investigación de vanguardia en diferentes campos de estudio de la mecánica de sólidos. En este contexto, específicamente el problema de la fractura dinámica en diferentes materiales, sigue siendo un reto para los investigadores.

Hoy en día se pueden encontrar en la literatura varias deducciones analíticas que nos permiten predecir la velocidad de avance de la fisura y describir el proceso de cinemática en casos sencillos. Entre los autores clásicos en relación con este tema, puede citarse a: Freund (1998) y Nishioka (1998). Pruebas experimentales llevadas a cabo con sumo cuidado por Ravi-Chandar y Knauss (1984a, b, c, d), y Kalthoff y Winkler (1987) entre otros nos permiten calibrar la aplicabilidad de las soluciones analíticas y numéricas.

En este contexto, los métodos numéricos son útiles para simular la propagación dinámica de fisuras en sólidos, pero también es posible encontrar soluciones a diferentes tipos de problemas utilizando distintos tipos de métodos numéricos. Entre otros se pueden mencionar:

- La simulación dinámica molecular usada por Gao (1996), Abraham et al.(1997), Furuya y Noguchi (1998).
- Los métodos de elementos finitos extendidos aplicados por Belytschko et al.(2003).
  - El método Meshfree aplicado en las fisuras del modelo presentado en Belytschko et al. (1994), Belytschko et al. (1995).
- El MEF (Método de Elementos Finitos) y el BEM (Boundary Elements Method), modelos que utilizan la interfaz cohesiva, técnicas propuestas por Needleman (1987), se utilizan en Aliabadi y Saleh (2002), Falk et al. (2001), Oliver et al. (2001) y Huespe et al. (2006).
- Modelos compuestos por el método de partículas discretas propuesto originalmente por Cundall y Hart (1989), son aplicados en Munjiza et al. (2004), Brara et al. (2001), Rabczuk y Belytschko (2004, 2007) y Rabczuk et al. (2007, 2009). Y,
- Algunas versiones de los modelos de reticulado. Entre otros, es importante mencionar el trabajo de Chiaia et al. (1997), y Rinaldi y Lai (2007), Rinaldi et al. (2008), estos métodos presentan una manera muy interesante de simular el continuo y presentan información cualitativa para comprender el comportamiento a fractura de cuerpos cuasi-frágiles como el hormigón o rocas.

La formulación del modelo de malla o reticulado tridimensional utilizado en este trabajo se basa en estudios realizados por Nayfeh y Hefzy (1978). El objetivo de dicho trabajo fue determinar las propiedades de un continuo elástico ortotrópico equivalente para modelar paneles compuestos de un gran número de barras pequeñas interconectadas. Utilizando el enfoque opuesto, es decir, representar un continuo ortotrópico por medio de un reticulado espacial, los resultados debidos a Nayfeh y Hefzy (1978) se utilizaron para desarrollar el MED para problemas de la mecánica sólidos.

Este enfoque fue propuesto por Riera (1984) para determinar la respuesta dinámica de placas y láminas en caso de cargas de impacto cuando la falla se presenta principalmente por tracción, que es generalmente el caso en estructuras de hormigón.

Riera y otros investigadores han llevado a cabo varias aplicaciones del MED para modelar estructuras de hormigón y hormigón armado sometidas a cargas impulsivas (Riera y Iturrioz 1995, 1998); fractura de fundaciones de suelo cemento apoyadas sobre un lecho de arena suelta (Schnaid et al 2004); Fractura dinámica (Miguel et al. 2010); generación y propa-

gación de los sismos (Dalguer et al. 2001); efecto de escala en el hormigón (Ríos y Riera 2004).

Los autores Barrios D'Ambra y Kostascki han utilizado la versión de MED originalmente propuesta por Riera para calcular parámetros fractomecánicos estáticos y dinámicos y simular el problema de propagación de fisuras. Algunos trabajos publicados en esta área por los autores son: Barrios D'Ambra et al. (2007) y Kostascki et al. (2008, 2009).

El MED se muestra como una herramienta apta para el cálculo del factor de intensidad de tensiones dinámico y estático utilizando diferentes metodologías, así como también para determinar la tenacidad a la fractura. En Kostascki et al. (2011) se presentan tres ejemplos de aplicaciones del MED.

**Objetivos:****Objetivos generales:**

*El objetivo principal de este trabajo es mostrar las posibilidades del MED en la determinación de la tenacidad a la fractura de materiales compuestos, que servirá para determinar dicha condición en un material bifásico. Es necesario remarcar que a través de la determinación de la tenacidad a la fractura del material compuesto se pretende determinar la influencia de la segunda fase, fibras, sobre la propagación de fisuras.*

Se utiliza como segunda fase fibras de Spectra 900. Las cuales poseen una de las más elevadas relaciones deformabilidad/peso entre las fibras hechas por el hombre. Su elevada tenacidad lo hace 15 veces más fuerte que el acero, siendo más durable que el poliéster.

Características de las fibras de Spectra 900:

- suficientemente ligero para flotar (0,97 g / cc densidad).
- alta resistencia a la luz los productos químicos, el agua y la luz ultravioleta
- excelente amortiguación de vibraciones
- muy resistente a la fatiga por flexión
- Bajo coeficiente de fricción
- Buena resistencia a la abrasión
- Constante dieléctrica baja hace que sea prácticamente transparente a los radares

Aplicaciones de Spectra 900:

- cuerdas marinas
- redes de pesca comercial
- seguridad en redes y productos de barrera
- cuerdas y eslingas industriales
- cascos militares
- paneles de protección contra las tormentas

**Objetivos particulares:**

- ✓ Desarrollo de modelos numéricos computacionales para el estudio de los micro mecanismos de falla de materiales compuestos.
- ✓ Determinar la tenacidad a la fractura del material compuesto.
- ✓ Determinar la fuerza de puente (bridging force) en el compuesto.
- ✓ Identificar los fenómenos conocidos como debonding, snubbing y spalling.

## **CAPITULO 2 - REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

En el presente capítulo se presenta una breve reseña del estado del conocimiento acerca de algunos aspectos de la mecánica de materiales compuestos, sobre la modelización matemática aplicable a estos materiales, procesos de ruptura en dichos materiales, así como también sobre el método utilizado en este trabajo

### **Introducción**

Los materiales compuestos han experimentado un gran aumento en su utilización. Generalmente, los materiales compuestos se emplean para mejorar la relación resistencia/peso o rigidez/peso de los elementos estructurales.

Un material compuesto está constituido por distintas fases o componentes. Cada una de estas fases puede considerarse uniforme, con propiedades cuantitativas conocidas. A pesar de que el número de constituyentes puede ser muy grande, en el campo de la ingeniería mecánica los materiales compuestos suelen estar formados por un material, llamado refuerzo, inmerso dentro de otro, llamado matriz.

Hay dos aspectos que determinan las propiedades de un material compuesto, las geometrías de las fases y las propiedades físicas de cada una de estas fases. Si consideramos la geometría de las fases, los materiales compuestos se pueden clasificar en materiales particulados, en los que la fase de refuerzo se encuentra en forma de partículas, o en materiales fibrosos, en los que el refuerzo se encuentra en forma de fibras. Estas fibras pueden ser cortas y tener una orientación aleatoria o pueden ser largas y tener una orientación específica. En este trabajo se tratará principalmente los materiales compuestos reforzados con fibras cortas.

## **2.1 Mecanismos de aumento de tenacidad**

En los últimos años se ha perfeccionado de manera considerable una nueva generación de materiales destinados a sustituir a los materiales convencionales ya existentes; estos nuevos materiales son llamados materiales compuestos, los cuales, se constituyen por la acción combinada de dos o más elementos distintos, que permiten mejorar la combinación de características mecánicas tales como la rigidez, fragilidad, tenacidad, capacidad de absorción de energía de deformación, dureza, comportamiento post-fisuración, la resistencia a las condiciones ambientales y a altas temperaturas. Para poder desarrollar estos nuevos materiales, es necesario conocer las propiedades mecánicas, constitución física y química de los materiales y la forma en que se pueden combinar.

Según WILLIAM Y CALLISTER [55] los materiales compuestos son una alternativa efectiva en diversos escenarios y están formados por matriz frágil reforzada con fibra dúctil, y las combinaciones de polímeros, vidrios cerámicos, materiales cerámicos con la adición de cristales, mortero reforzado con fibras de polipropileno y hormigón reforzado con fibras.

La utilización de fibras para refuerzo de hormigones de alta resistencia ha tenido resultados muy satisfactorios al ser sometidos a altas temperaturas, y permiten obtener una mayor eficiencia en los resultados económicos de grandes obras de la ingeniería. Esta nueva tecnología de construcción permite que el hormigón pueda aumentar considerablemente su calidad en muy poco tiempo, cuestión que no se logra con ningún otro material estructural.

Muchos compuestos están formados por sólo dos fases en el que uno se denomina matriz, que es continua y rodea a la otra fase que es la fase dispersa. Estos compuestos se basan en las propiedades de las fases que lo constituyen, así como también en la cantidad relativa y la geometría de la fase dispersa. Los mecanismos fundamentales de aumento de tenacidad son por microfisuras, por partículas y por fibras, siendo estas últimas las que mayor efectividad generan en la mejora de resistencia a la fractura, durabilidad, ductibilidad, resistencia al impacto y resistencia a la tracción en flexión, siempre que el tipo de fibra utilizada sea apropiada y en dosis adecuadas.

### **2.1.1 Aumento de tenacidad por microfisuras**

Si bien es evidente que al formarse grietas en los materiales estas llevan al daño de dicho material, a menudo las microfisuras aumentan la tenacidad del mismo. Pero para que este procedimiento sea efectivo se debe considerar un crecimiento estable de las microfisuras, cuestión que no sucede en materiales frágiles.

El grado de endurecimiento de las microfisuras depende de la temperatura; además, los bajos esfuerzos residuales no pueden impedir que las microfisuras se vuelven inestables y se propaguen. Todas estas cuestiones hacen que este proceso no sea efectivo.

### **2.1.2 Compuestos reforzados por partículas**

De acuerdo con WILLIAM y CALLISTER [55], en los compuestos reforzados por partículas la fase dispersa tiene aproximadamente el mismo tamaño en todas las direcciones. El refuerzo por partículas se puede diferenciar en: materiales reforzados por partículas de gran tamaño y materiales compuestos reforzados por dispersión.

#### **2.1.2.1 Compuestos reforzados con partículas grandes**

El mecanismo de aumento de tenacidad por medio de estas partículas consiste en restringir el movimiento en las proximidades de la fase matriz, de esta manera, estas partículas soportan una porción de la carga que es transferida por la matriz. Aquí la fase es más dura y más rígida que la matriz. Mientras más fuerte sea la unión de la interfaz matriz-partícula, mayor será el grado de refuerzo logrado.

Las partículas pueden tener una amplia variedad de geometría, pero deben poseer aproximadamente las mismas dimensiones en todas las direcciones (ejes iguales), por ejemplo, mortero de cemento compuesto de cemento (la matriz) y arena (partículas).

#### **2.1.2.2 Compuestos reforzados por dispersión**

El mecanismo de aumento de tenacidad es similar al que ocurre con el endurecimiento por precipitación, en el cual el aumento de tenacidad se debe a la interacción entre las partículas y discordancias dentro de la matriz. En la fabricación de estos materiales compuestos, es necesario mantenerlos a elevadas temperaturas durante períodos prolongados, ya que las partículas dispersas son elegidas para ser reactivas con la fase matriz.

### **2.1.3 Compuestos reforzados por whiskers**

Los whiskers son monocristales muy delgados (pequeños filamentos) que tienen un cociente longitud-diámetro muy grande. Como consecuencia de su tamaño pequeño, tienen alto grado de perfección cristalina y virtualmente están libres de defectos, lo que explica su resistencia excepcionalmente alta.

Estos materiales presentan elevada resistencia y de elevado costo. Su dificultad radica en que es difícil e impracticable incorporar whiskers dentro de una matriz. Aunque este

tipo de refuerzo ha sido de uso frecuente, su utilización se ha visto restringida en algunos países a causa de su carácter nocivo para la salud humana.

La falla en estos compuestos se debe a la falta de conexión entre sus superficies y matriz y pueden producir el desvío de la fisura, lo cual puede aumentar también la tenacidad del material.

#### **2.1.4 Compuestos reforzados por fibras**

Al utilizar fibras dúctiles con elevada resistencia a la tracción, así como también poseer gran fuerza de conexión entre las fibras y la matriz, estos compuestos poseen alta resistencia y son el mecanismo más eficiente. Esto contribuye al aumento de la en todos procesos, desde el despegue hasta la ruptura de la fibra.

#### **2.2 Aumento de la tenacidad de materiales compuestos reforzados por fibras**

El aumento de la tenacidad está directamente relacionado con la relación de tensión proveniente de las fibras y con la apertura de las fisuras, basadas en diversos procesos y efectos tales como *debonding* (despegue) de interfaz de fibra-matriz, *pull-out* (fibra siendo extraída de la matriz) o *slip* (deslizamiento), *spalling* (fragmento de la matriz en la región de salida de la fibra de la matriz) y al *aparent strength* (tensión de ruptura de la fibra) soportada antes de la ruptura.

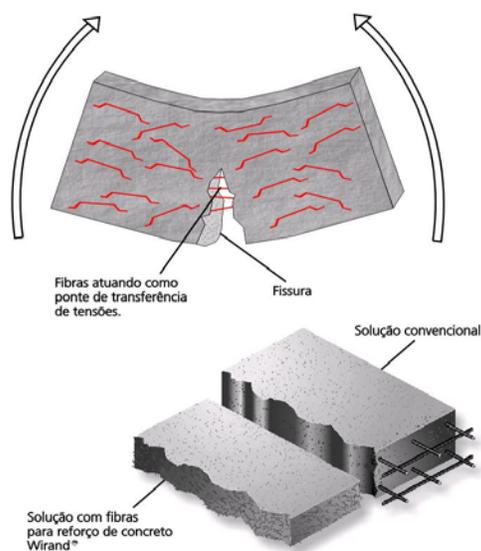
Para sustituir a los materiales convencionales, los *materiales compuestos* consisten en la *acción combinada de dos o más materiales diferentes*, es decir, *dos fases* en las que una se denomina matriz y la otra es la *fase dispersa*.

Los materiales compuestos son utilizados en muchos ámbitos de la vida cotidiana y también se ha expandido en la construcción civil. Algunas aplicaciones que podemos mencionar son: placas de fibrocemento, plásticos reforzados con fibra de vidrio, estructuras de hormigón, pavimentos rígidos, etc. La figura 2.1 muestra la incorporación de fibras a los compuestos de cemento.



*Fig.2.1: CHODOUNSKY [7]: (a) Adición de fibras al cemento; (b) Fibras aumentando la resistencia al corte del hormigón*

El mecanismo de aumento de tenacidad consiste en que la matriz transfiere parte de la tensión aplicada a las fibras, que resisten una porción de la carga; por lo tanto el grado de refuerzo, entonces, dependerá de un enlace fuerte en la interfaz fibra-matriz. La figura 2.2 muestra las fibras Wirand® agregadas al concreto, en calidad de una armadura tridimensional que redistribuye las tensiones aplicada al elemento estructural que restringe la propagación de grietas y aumentando la resistencia después de la fisuración del elemento estructural aumentando la resistencia.



*Fig.2.2: MACCAFERRI [8]. Fibras de acero reforzando hormigón.*

La figura 2.3 muestra algunas aplicaciones de hormigón reforzado con fibra.



Fig.2.3: MACCAFERRI [8]. Aplicaciones de hormigón reforzado con fibras.

Para lograr que el compuesto fibra-matriz tenga un rendimiento estructural mayor que la matriz, será necesario que el módulo de elasticidad de la fibra sea mayor que el de la matriz, por lo tanto tendrá una resistencia a la tracción elevada. Esto último hace necesario que la adherencia entre ambos materiales sea alta para evitar el arrancamiento de las fibras antes de que la resistencia sea movilizada.

**El efecto de la orientación de la fibra y la distribución en la matriz también debe ser considerado. La orientación de una fibra relativa al plano de ruptura o fisura, influye fuertemente en su capacidad de transmitir cargas. Una fibra colocada en paralelo al plano de ruptura no tiene ningún efecto, mientras que una fibra perpendicular a la ruptura tiene un efecto máximo.**

**La fase fibra sirve como una barrera contra la propagación de grietas, aunque algunas fibras individuales pueden llegar a fallar, la fractura total del compuesto no se produce hasta que un gran número de fibras han fallado. Es esencial una alta resistencia de unión entre la fibra y la matriz, ya que la resistencia final del material compuesto depende de la magnitud de esta conexión.**

### 2.3 Modelos matemáticos para calcular el aumento de la tenacidad de materiales compuestos reforzados por fibras

Muchos investigadores han encontrado fundamental interés en el estudio de los efectos de la adición de fibras en materiales compuestos cuando una grieta principal se propaga. En la literatura podemos encontrar varios modelos que tienen como objetivo predecir el comportamiento de estos materiales.

LI, WANG Y BACKER [33], desarrollaron tests de pull-out con fibras reforzando compuestos de cemento (FRC). Dichos ensayos tuvieron en cuenta la orientación y la distribución de las fibras dentro de la matriz, así como también la linealidad y la fuerza elástica de las fibras para permitir un completo pull-out sin romper. En el modelado propuesto por estos autores se tuvo en cuenta la variación en la tensión de conexión de fricción en la interfaz fibra-matriz con la distancia de deslizamiento de la fibra, observando resultados muy satisfactorios en el comportamiento pull-out para fibras de nylon o polipropileno, observando que en estas fibras sintéticas la tensión de unión aumenta con la distancia de deslizamiento durante el proceso de pull-out. En cambio, para las fibras de acero, la tensión de conexión disminuye con la distancia de deslizamiento. No obstante, estas fibras también se comportan de manera razonablemente buena.

LEUNG Y LI [26] pusieron énfasis en el análisis de los efectos de la inclinación de las fibras y tensión de puente de las fibras que atraviezan la fisura, para fibras reforzando compuestos de matriz frágil. Se tuvieron en cuenta el efecto *snubbing* (flexión de la fibra a la salida de la matriz), *debonding* y *spalling* (rotura de matriz a la salida de la fibra), pudiendo determinar que la mejora en los materiales en los que se incorporan fibras se puede derivar por el análisis cuantitativo de la propagación de las tensiones para una fisura que se está abriendo. La fuerza de puente producida debido a este acontecimiento se puede determinar en dos partes: una parte producida por la tensión de la interfaz matriz-fibra (figura 2.4 (a)) y otra parte debido a las reacciones que ocurren por la flexión de la fibra dentro de la matriz (figura 2.4 (b)). La fuerza total se determina mediante una suma vectorial de las dos fuerzas antes descriptas; entonces, la tensión se obtiene mediante el número de fibras por unidad de área y la fuerza de puente producida por cada una de estas fibras.

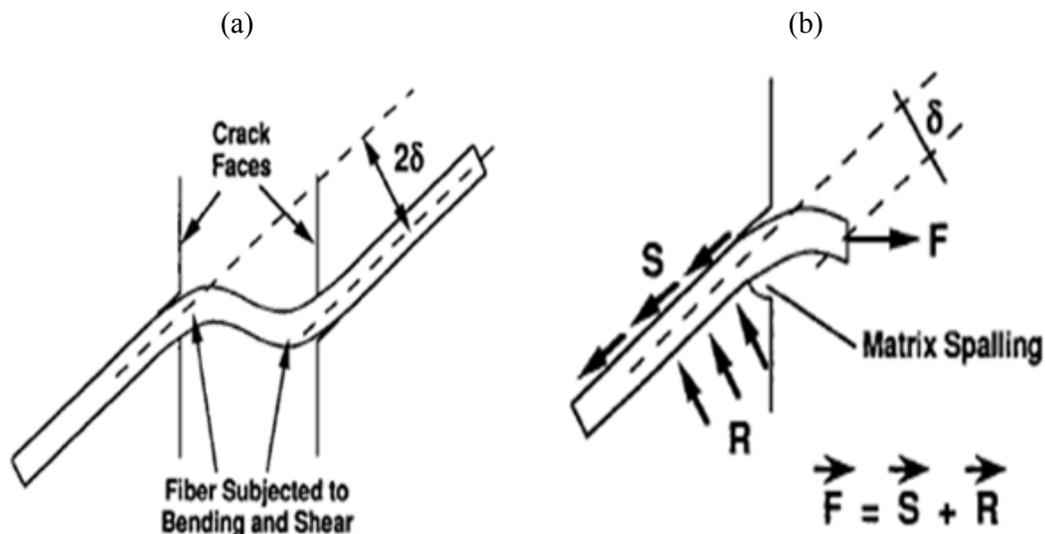


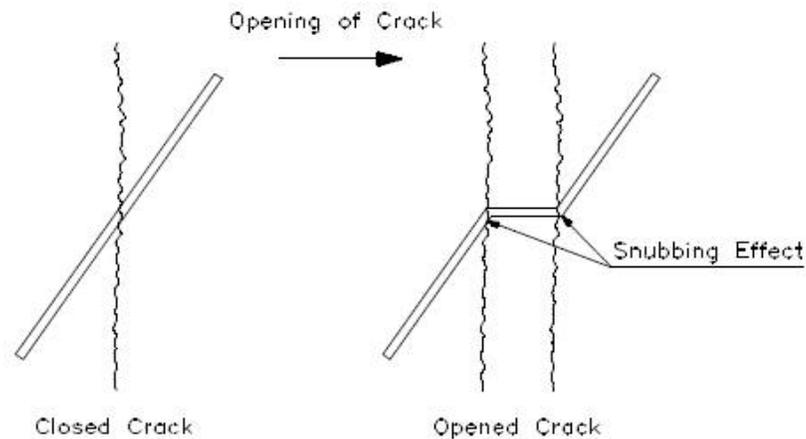
Fig.2.4: LEUNG e LI [26]: (a) Fibra flexada en la intersección de la fisura; Componentes de fuerza de puente en la sección de la fisura.

Diferentes fenómenos fueron determinados a partir del estudio de fibras frágiles reforzando compuestos de matriz frágil, como ser: la flexión y o corte pueden conducir a roturas y la fuerza que actúa sobre la matriz en la fibra pueden conducir al *spalling* en la matriz en el punto de salida de la fibra, el *spalling* puede conducir a la relajación de las fibras y el retraso en la rotura de la fibra tiene un fuerte efecto sobre la tensión en el compuesto. Hallaron notable incidencia de la tensión de las fibras inclinadas en el plano de la fisura, lo cual afecta notablemente en el comportamiento mecánico de compuestos de matriz frágil, de manera que tanto la flexión de la fibra y la rotura de la matriz son factores que intervienen en la tensión de una fisura que se está abriendo.

La capacidad del material en la resistencia a la propagación de la fisura, la cantidad de energía absorbida para la producción de la fisura en el elemento y la extensión evidente de la fisura, fueron estudiados por BRANDT [2], determinando que la selección de parámetros como la calidad de la fibra y matriz son factores fundamentales que influyen en la absorción más baja o más alta de energía.

ZHANG y LI [61] analizaron matriz de cemento con fibras de carbono y la influencia del ángulo de inclinación de dichas fibras en la fisura, cuando se somete a cargas dichos compuestos. Pudieron observar una caída en la tensión de ruptura de la fibra a medida que el

ángulo aumenta, lo cual también está influenciado por la elasticidad de la fibra y de la matriz y la fuerza de corte en la interfaz fibra-matriz.



*Fig.2.5: Ilustración del efecto snubbing.*

KATZ y LI [24] modelaron analíticamente compuestos reforzados por fibra de carbono, con el fin de predecir el resultado de carga y tensión de dichas fibras, carga de puente y tensión de frágiles inclinadas y cruzando una fisura, teniendo en cuenta el efecto de spalling y concentración de fricción en el punto donde la fibra se curva por encima de la matriz. A partir de experimentos, pudieron determinar que un aumento en el módulo de las fibras conlleva a una esperada mejoría en las propiedades del material, ya que la resistencia de ligación en el módulo de la matriz incrementa la tensión en las fibras, para un ancho de fisura determinado, lo cual produce una menor falla de las fibras y esto lleva a una disminución en la carga de puente.

Existen también muchos otros trabajos sobre compuestos de cemento que merecen atención como LI y WU [30], KATZ LI y KAZMER [19], LI y MAALEJ [28], MOBASHER, OUYANG y SHAH [33], LI y CHAN [23], SHAH y OUYANG [43], NELSON, LI y KAMADA [37], WANG y LI [49], LIU, TAO y GUO [31].

## 2.4 Procesos de ruptura de materiales compuestos

El estudio del proceso de ruptura de materiales compuestos permite entender los procesos que ocurren en diversas escalas del problema estudiado. El efecto de aumento de la tenacidad (*toughening*) que fibras cortas producen en cerámicos es conocido y aplicado en varios campos de ingeniería, y conocer con profundidad como es la interacción de esfuerzos que se presentan en la fibra y matriz durante este proceso permite mejorar este efecto como lo muestran trabajos clásicos en el área, Brandt (1985), Brebbia et al. (1984), Budiansky et al. (1986) y Cao et al. (1990).

Mecanismos típicos ya identificados se suceden durante el proceso de ruptura del conjunto fibra-matriz, conocidos como *debonding*, *snubbing* y *spalling* los cuales producen que la descripción del aumento de tenacidad, conocido como *toughening*, sea complejo. Describimos brevemente los fenómenos antes citados: Cuando una fisura atravesada por una fibra tiende a abrirse, la fibra antes de despegarse de la matriz ejerce una presión intensa sobre la matriz.

Antes de que ocurra el despegue (*debonding*), las tensiones generadas por esta presión alcanzan un máximo. Es posible que las tensiones debajo de la fibra inclinada cerca del punto donde la fibra sale de la matriz, sean mayores que la resistencia de la matriz, entonces se produce la ruptura de la matriz cercana al punto de salida de la fibra, este efecto se conoce como *spalling* y es indicado en la Fig. 2.6. Si la extensión del *spalling* sobrepasa la longitud embebida de la fibra, la misma pierde su contribución en el aumento de tenacidad; si la extensión es menor, las tensiones liberadas eliminan la posibilidad de la fibra de romperse, en otras palabras, la fibra permanece intacta y puede contribuir al aumento de tenacidad. Después de que se produce el despegue (*debonding*), la fibra comienza a ser extraída fuera de la matriz, avance indicado como *Sf* en la Fig. 2.7. La superficie despegada de la fibra puede deslizarse con respecto a la matriz, comenzando un proceso de fricción entre fibra y matriz. En el punto de salida, donde la fibra comienza a sobresalir de la cara de la fisura, se produce un pliegue de la fibra que se puede observar en la Fig. 2.7. En este punto, la matriz actúa como una polea con fricción, este efecto es denominado *snubbing*.

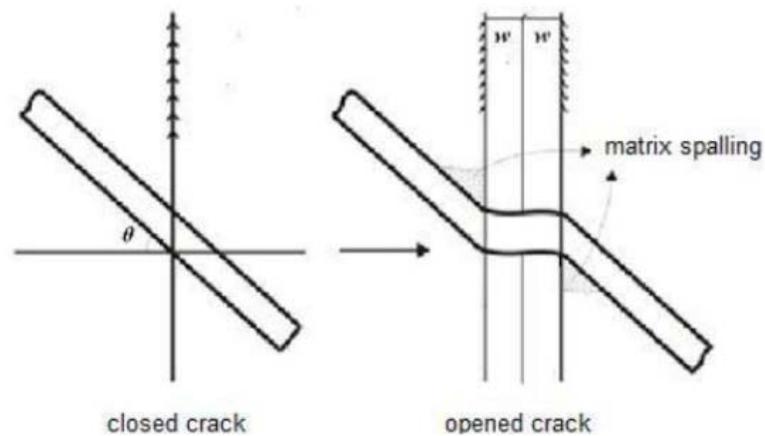


Figura 2.6: Efecto de Spalling en la interacción entre Fibra-Matriz

Li (2003) lo explica como una cuerda alrededor de una polea dónde la fricción se incrementa exponencialmente. La combinación de los efectos de *spalling* y *snubbing* hacen que el aumento de tenacidad debido a la interacción fibra-matriz sea complejo.

El efecto de *snubbing* se presenta únicamente cuando el ángulo entre la dirección de la fibra y la fuerza aplicada no están alineadas, este fenómeno muestra como la fuerza ejercida por la fibra se incrementa en esta nueva configuración, es decir a mayor ángulo, indicado como  $\phi_f$  en la Fig. 2.7 mayor será la fuerza que actúa sobre la parte de la fibra que continúa embebida en la matriz  $P_{sf}$ .

Aunque el efecto de *spalling* es bastante importante en el análisis del aumento de la tenacidad, los investigadores no le han dado mucha importancia, existiendo muy pocas publicaciones sobre dicho efecto.

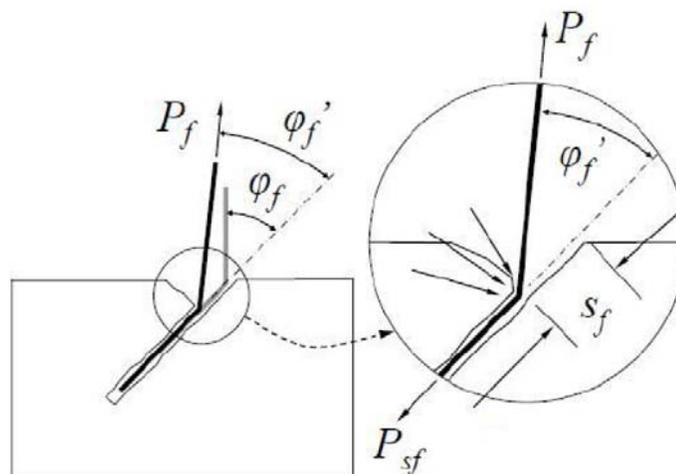


Figura 2.7: Ilustración del efecto de snubbing

## 2.5 FUNDAMENTOS TEORICOS DE MECÁNICA DE FRACTURA

### 2.5.1 Introducción a la mecánica de fractura

Usualmente, en los problemas de ingeniería, para verificar la seguridad de una estructura se calcula la tensión máxima equivalente dada por alguna teoría de resistencia (Von Mises, Tresca, Rankine entre otras) a la que está sometida  $\sigma_{\text{máx eq}}$ . Esta es comparada con el valor de la tensión de rotura equivalente, que caracteriza la ruptura de una probeta del mismo material que tendrá una geometría simple normalizada, la cual será sometida a un valor de tensión también simple y normalizada  $\sigma_{\text{rot eq}}$ . La tensión máxima equivalente,  $\sigma_{\text{máx eq}}$ , es una función de la geometría, las condiciones de contorno y las cargas aplicadas ( $\sigma$ ), mientras que la tensión de rotura equivalente,  $\sigma_{\text{rot eq}}$ , depende del material y de las condiciones en que se realizó el ensayo para obtenerla (temperatura  $T$ , velocidad de aplicación de la carga  $\dot{\sigma}$ ).

El suceso de la aplicación de este procedimiento tradicional de cálculo depende del uso de un coeficiente de seguridad ( $\gamma$ ) que sea lo suficientemente alto como para evitar fallas provocadas por cualquier aspecto que no se haya tenido en cuenta en el cálculo y suficientemente bajo como para evitar peso exagerado y consumo de material innecesario, para que el costo no sea excesivo. Estos coeficientes se eligen entonces en base a la experiencia acumulada. (Anderson 2005, Kaninnen y Popelar 1985)

Se tiene entonces:

$$\sigma_{\text{máx eq}}(\text{Geometría, Cond. de contorno, } \sigma) \leq \sigma_{\text{rot eq}}(\text{material, } T, \dot{\sigma}) / \gamma \quad 2-1$$

Si la estructura analizada posee defectos, para valores de cargas relativamente pequeñas, el valor de las tensiones equivalentes en las proximidades de las puntas de estos defectos serán muy altas, pero esto no implica el colapso de la misma. Por lo tanto, evaluar piezas con defectos utilizando la inecuación 2-1 se torna inviable. La comparación de parámetros del material y de la estructura que no sean directamente tensiones equivalentes se presenta como una salida para evaluar la integridad de estructuras con defectos

Los resultados de la Mecánica de Fractura originan nuevas filosofías de proyecto, en que se asume que la estructura tiene defectos (fisuras), como consecuencia por ejemplo, del proceso constructivo utilizado o de cualquier pequeño accidente durante la vida útil de la estructura. Básicamente el problema consiste en obtener el comportamiento estimativo de la fisura observada o de la que se sospecha su existencia. Es necesario saber si la fisura permanecerá con dimensiones pequeñas durante el período de servicio, aunque aumente establemente de dimensiones durante este período, o se propagará inestablemente, siendo en este caso necesario tomar recaudos preventivos.

Si consideramos entonces que en la estructura en análisis existe una fisura, las tensiones en los extremos de la misma serán elevadas, por más bajo que sea el nivel de las cargas aplicadas. Aun así, está comprobado que las estructuras con defectos resisten, aunque en este caso no es posible utilizar la ecuación 2-1 para dimensionar las mismas, pues siempre se verificará que  $\sigma_{\text{máx eq}} \geq \sigma_{\text{rot eq}}$ . Por esta razón tenemos que buscar una inecuación de dimensionamiento que no esté en función de las tensiones. Esta inecuación tendrá que ser función de un parámetro alternativo que llamaremos  $Z$ . En la estructura en análisis,  $Z$  será función de las condiciones de contorno aplicadas, geometría y tamaño de la fisura, el cual compararemos con el valor de este parámetro  $Z_{\text{mat}}$  medido en el momento de su colapso en una probeta de geometría y condiciones de contorno simples.

De esta forma, la inecuación de dimensionamiento equivalente a la 2-1 pero considerando un cuerpo con fisuras, será:

$$Z(a, \text{Cond. de contorno, Geometria}) < Z_{\text{mat}}(\text{material, } T, \dot{\sigma})/\gamma \quad 2-2$$

Cuando la inecuación 2-2 se verifica, se considera que la fisura no propaga en forma inestable.

Existen varias propuestas de parámetros para  $Z$ , dos válidas dentro de lo que se llama la mecánica de la fractura lineal elástica (MFLE): la tasa de energía liberada ( $G$ ), que fue propuesta por Griffith en 1920 que es considerada como un parámetro global ya que envuelve el balance energético de la estructura como un todo, y el factor de intensidad de tensiones ( $K$ ), propuesto por Irwin en 1957, el cual es un parámetro local, pues solamente considera la distribución de tensiones en un entorno de la punta de la fisura.

Dentro de la mecánica de fractura no lineal, la cual considera la interacción de la propagación inestable de una fisura con la plasticidad, existen también dos parámetros: la integral  $J$  (Rice, 1968) que es un parámetro energético, considerado también global y el COD o abertura de la punta de la fisura, que fue introducido por Wells en 1961 y es considerado un parámetro local. Se pueden encontrar más detalles sobre estos parámetros en Anderson 2005.

### 2.5.2 Mecánica de fractura lineal elástica (MFLE)

Los conceptos de la mecánica de fractura elástica-lineal son aplicables a aquellos materiales con fisuras que obedecen la ley de Hooke y cuyo comportamiento global tiene carácter lineal y elástico. Para ellos la teoría establece una descripción cuantitativa de la criticidad del defecto analizado proporcionando una predicción acerca de la vida útil de las estructuras.

En la MFLE existen dos maneras de encarar el estudio:

- Criterio energético de Griffith o Criterio Global: se basa en la determinación de la energía disponible para el avance o extensión inestable de la fisura preexistente, que se obtiene al hacer un balance energético en toda la estructura.
- Criterio del factor de intensidad de tensiones de Irwin o criterio local: se basa en la determinación del estado tensional de la estructura en las proximidades del extremo de la fisura.

### 2.5.3 Balance energético de Griffith

Según este criterio la extensión de la fisura ocurre cuando la energía disponible para el desarrollo de la fisura es suficiente para superar la resistencia del material. La resistencia del material puede incluir la energía superficial, el trabajo plástico u otro tipo de energía de disipación asociado con la propagación de la fisura.

El balance energético de Griffith para un incremento diferencial del área de la fisura ( $dA$ ) en una placa sujeta a una tensión remota,  $\sigma$ , que contiene una fisura de longitud  $2a$ , puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_S}{dA} = 0 \quad 2-3$$

ó

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_S}{dA} \quad 2-4$$

Dónde  $E_T$  es la energía total,  $\Pi$  es la energía potencial suministrada por la energía de deformación interna y las fuerzas exteriores, y  $W_S$  es el trabajo requerido para crear nuevas superficies de la fisura.

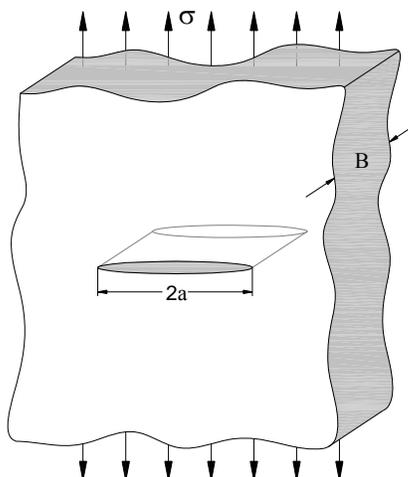


Figura 2.8: Placa de espesor constante y dimensiones infinitas con una fisura pasante longitud  $2a$ .

Para la placa fisurada mostrada en la figura 2.8, Griffith llegó a (Anderson 2005):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_s}{\pi \cdot a}} \quad 2-5$$

Dónde  $\sigma_f$  es la tensión de fractura,  $a$  es la semilongitud de fisura,  $E$  es el módulo de elasticidad y  $\gamma_s$  la energía de superficie del material.

El criterio de Griffith se puede aplicar a otros tipos de configuraciones fisuradas. Por ejemplo, la tensión de fractura en un cuerpo que tiene una fisura de sección circular (figura 2.9) está dada por:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\pi \cdot E \cdot \gamma_s}{2 \cdot (1 - \nu^2) \cdot a}} \quad 2-6$$

Dónde  $a$  es el radio de la fisura y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. (Anderson 2005)

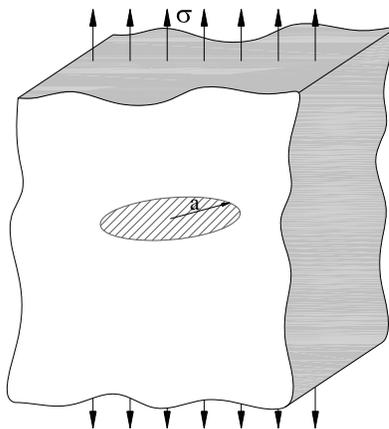


Figura 2.9: Cuerpo de dimensiones infinitas con una fisura de sección circular sometido a una tensión remota de tracción  $\sigma$ .

### 2.5.4 Tasa de energía liberada, G

En 1956, Irwin (citado en Anderson 2005) definió la tasa de energía liberada, G, como una medida de la energía disponible para el incremento de la extensión de la fisura:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad 2-7$$

G es la razón de cambio de la energía potencial con el área de la fisura. Es también llamada *driving force*, fuerza guía de la fisura o fuerza que dirige la fisura, es importante notar que su dimensión es la de energía por unidad de superficie.

La fisura comienza a propagar cuando G alcanza un valor crítico:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} \quad 2-8$$

Dónde  $G_c$  (tasa crítica de energía liberada) es una medida de la tenacidad del material.

La energía potencial para un cuerpo elástico ( $\Pi$ ), para un proceso cuasiestático, es definido de la siguiente manera:

$$\Pi = U - W \quad 2-9$$

Siendo U es la energía de deformación almacenada en el cuerpo y W es la energía potencial producida por las fuerzas externas.

### 2.5.5 Análisis de tensiones en las proximidades del extremo de una fisura

Para ciertas configuraciones fisuradas sujetas a fuerzas externas, es posible describir mediante expresiones cerradas la tensión en el cuerpo, asumiendo un comportamiento del material lineal elástico e isotrópico. Westwrgaard e Irwin (citados en Anderson 2005) fueron algunos de los primeros en publicar estas soluciones. Si se define el origen de coordenadas polares en la punta de la fisura (figura 2.10), se puede demostrar que el campo de tensiones en un cuerpo elástico lineal fisurado es dado por:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) \cdot f_{ij}(\theta) + O_1 r^0 + O_2 r^{3/2} + O_3 r^2 + \dots \quad 2-10$$

Dónde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de tensiones, r y  $\theta$  se definen en la figura 2.10, k es un constante,  $f_{ij}$  es una función adimensional de  $\theta$  y los coeficientes  $O_i$  son dependientes de la geometría y condiciones de borde de la estructura. Cuando r tiende a cero, el primer término tiende a infinito, pero los términos restantes permanecen finitos o tienden a cero. Por lo tanto la forma de la distribución de tensiones en las proximidades de la punta de la fisura es independiente de la

geometría y condiciones de contorno del componente estudiado. También se puede demostrar que los desplazamientos cercanos a la punta de la fisura varían con  $\sqrt{r}$ .

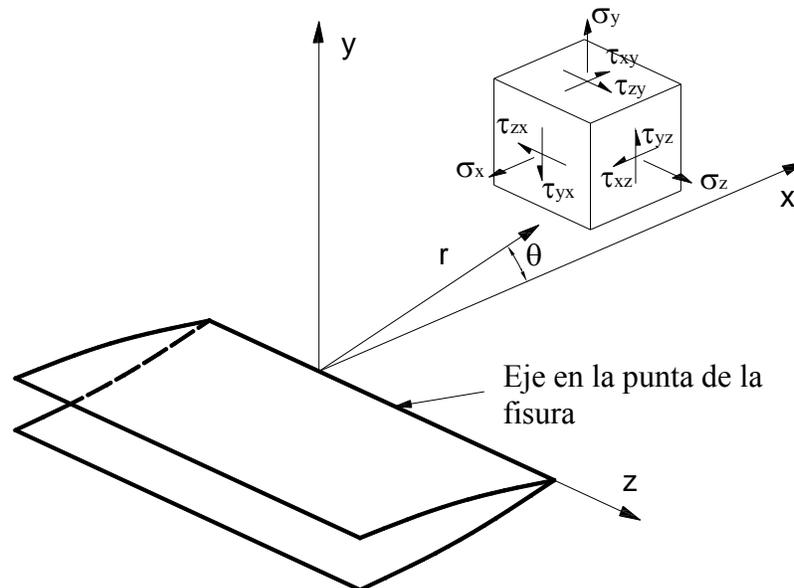


Figura 2.10: Definición de las coordenadas con los ejes en la punta de la fisura.

Existen tres tipos de solicitaciones que la fisura puede experimentar, como se ilustra en la figura 2.11:

- Modo de apertura o Modo I, en el cual las caras de la fisura se separan casi paralelamente entre sí. La solicitación actúa normal al plano de la fisura, ésta tiende a abrir la misma.
- Modo de deslizamiento o Modo II, en el cual las caras de la fisura se deslizan una sobre la otra. Corresponde a una solicitación de cizalla en el plano de la fisura.
- Modo de torsión o Modo III, donde las caras de una fisura se deslizan lateralmente una respecto de la otra. Corresponde a una solicitación de cizalla fuera del plano de la fisura.

Un cuerpo fisurado puede ser solicitado en cualquiera de estos tres modos, o con una combinación de dos o de los tres modos.

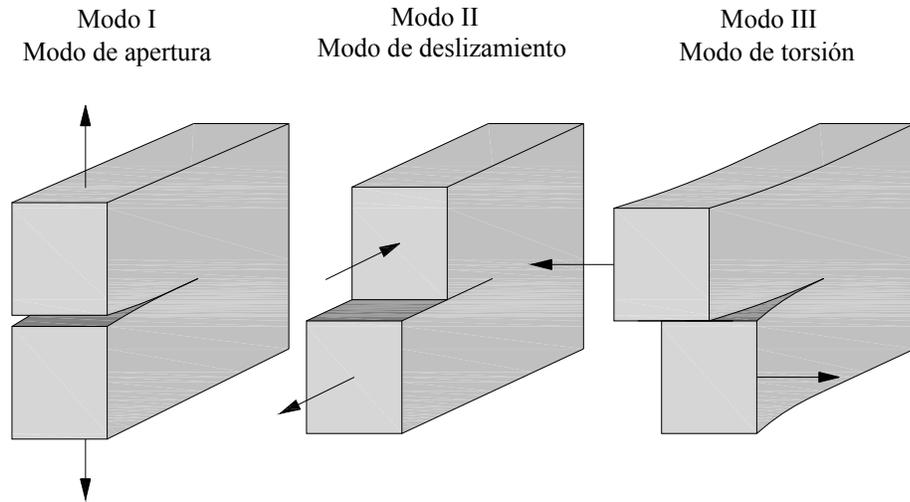


Figura 2.11: Modos de carga que se pueden aplicar a una fisura.

### 2.5.6 Factor de intensidad de tensiones

Cada tipo de carga produce en la punta de la fisura una singularidad en función de  $1/\sqrt{r}$ , pero la constante de proporcionalidad  $k$  y  $f_{ij}$  dependen del modo de carga. Es conveniente reemplazar  $k$  por el factor de intensidad de tensiones,  $K$ , siendo  $K = k \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}$ . Este factor de intensidad de tensiones es usualmente dado denotando el modo de carga con un subíndice en número romano, es decir,  $K_I$ ,  $K_{II}$  o  $K_{III}$ . Entonces el campo de tensiones delante de la punta de la fisura en un material elástico lineal isotrópico puede ser escrito como:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(I)}(\theta) \quad 2-11-a$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(II)}(\theta) \quad 2-11-b$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}^{(III)}(\theta) \quad 2-11-c$$

Consideremos un campo singular de Modo I en una placa fisurada donde  $\theta = 0$ . La tensión en la dirección "x" y en la dirección "y" son iguales:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad 2-12$$

Cuando  $\theta = 0$ , la tensión de corte es nula, lo que significa que el plano de la fisura es un plano de tensiones principales para el modo I de carga. La figura 2.12 es una gráfica esquemática de las tensiones  $\sigma_{yy}$ , tensión normal al plano de la fisura, versus la distancia a la punta de la fisura. La ecuación 2-12 es válida solamente en las cercanías de la punta de la fisura, donde

la singularidad  $1/\sqrt{r}$  domina el campo de tensiones. Las tensiones lejos de la punta de la fisura son gobernadas por las condiciones de borde remotas. Por ejemplo, si la estructura fisurada es sometida a una tensión remota uniforme,  $\sigma_{yy}$  se aproxima a ese valor constante  $\sigma^{00}$ .

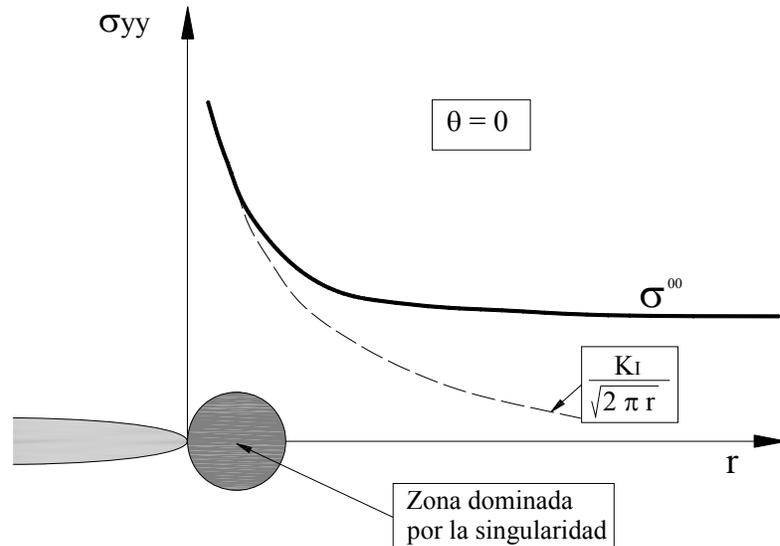


Figura 2.12: Tensiones normales al plano de la fisura en el Modo I.

El factor de intensidad de tensiones define la amplitud de la singularidad en la punta de la fisura. Esto quiere decir que las tensiones en las cercanías de la punta de la fisura aumentan proporcionalmente a  $K$ . Es más, el factor de intensidad de tensiones define completamente las condiciones en la punta de la fisura. Si  $K$  es conocido, es posible calcular todas las componentes de las tensiones, deformaciones y desplazamientos en función de  $r$  y  $\theta$ . Una posibilidad sería tomar este factor  $K$  como el parámetro  $Z$  presentado en la ecuación 2-2. Este simple parámetro de descripción de las condiciones en la punta de la fisura se transforma en uno de los conceptos más importantes en la mecánica de fractura.

En el gráfico anterior queda implícito que las tensiones en la punta de la fisura son infinitas. En materiales reales, sin embargo, las tensiones en la punta de la fisura son finitas. Deformaciones inelásticas en el material, como plasticidad en metales y crazing en polímeros, conducen a una relajación adicional de las tensiones en la punta de la fisura.

Por esto, existen correcciones simples a la mecánica de fractura lineal elástica (MFLE) cuando ocurre una fluencia moderada en la punta de la fisura. Para una fluencia más extensa, se deben aplicar parámetros alternativos que tienen en cuenta el comportamiento no lineal del material.

Cuando ocurre la fluencia, las tensiones se tienen que redistribuir para satisfacer el equilibrio. La zona rayada en la figura 2.13 representa las fuerzas que estarían presentes en un material elástico ideal pero no existen en el material elasto-plástico porque las tensiones no pueden exceder la tensión de fluencia. La zona plástica debe aumentar de tamaño para absorber estas fuerzas. Un simple balance de fuerzas conduce a una estimación de segundo orden del tamaño de la zona plástica,  $r_p$ , que es el doble de  $r_y$ , la estimación de primer orden. Donde  $r_y$  es el radio de zona singular considerando el material elástico (ideal).

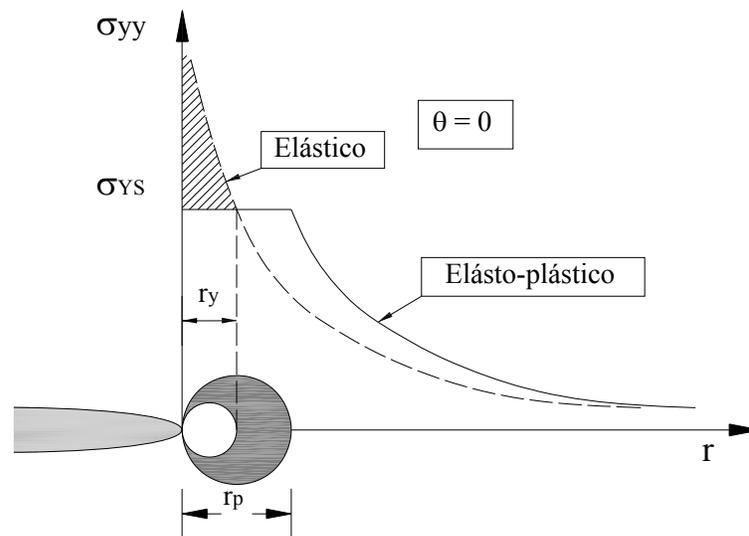


Figura 2.13: Estimación del tamaño de la zona plástica de primer y segundo orden. El área rayada representa las cargas que deben ser redistribuidas, lo que resulta en un aumento de la zona plástica.

### 2.5.7 Relación entre K y G

Para una placa infinita con fisura pasante sujeta a una tracción uniforme (figura 2.8), se llega a la siguiente relación entre G y K para estado plano de tensiones (capítulo 2 de Anderson 2005):

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad 2-13$$

Para un estado de deformación plana E debe ser reemplazado por  $E/(1-\nu^2)$ . Para evitar escribir separadamente las expresiones para estado plano de tensiones y estado plano de deformaciones, se adopta la siguiente nomenclatura:

$E' = E$  para estado plano de tensiones

$E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  para estado plano de deformaciones

Entonces la relación entre G y K para ambos será:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad 2-14$$

Se puede encontrar en Anderson 2005 análisis realizados por Irwin donde se prueba que esta ecuación es la relación general entre G y K que se aplica a toda configuración.

La ecuación 2-14 es la relación general entre G y K para el Modo I. Cuando los tres modos de carga están presentes, la tasa de liberación de energía está dada por:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2 \cdot \mu} \quad 2-15$$

La contribución de los tres modos es aditiva porque la tasa de energía liberada, al igual que la energía, es un escalar.

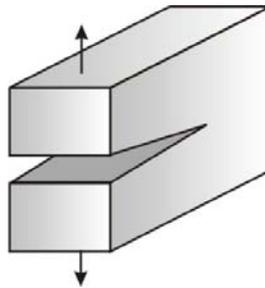
## CAPÍTULO 3 - MATERIALES Y MÉTODOS

En el siguiente capítulo se describe el modelo matemático utilizado en este trabajo para el estudio del material compuesto. También se detalla el método numérico utilizado para el modelado del problema en estudio.

### 3.1. Modelo teórico del problema estudiado – PROPUESTA DE Li et al [33]

#### 3.1.1 Fisura

Se considerará una fisura tipo opening mode o modo “apertura” (Modo I). Fisura con superficie plana y propagación paralela.



*Fig.3.1: Fisura considerada – Modo I.*

#### 3.1.2 Fibras

Las fibras tienen geometría circular. Se conoce el diámetro y longitud de dichas fibras, así como también el módulo de elasticidad ( $E_f$ ) y resistencia ( $\sigma_{fu}$ ).

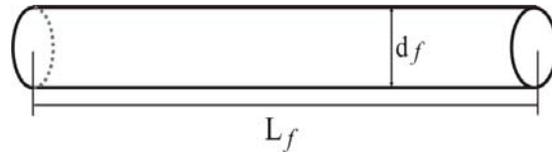


Fig. 3.2: Geometría de la fibra.

Tanto la matriz como la fibra serán consideradas materiales elásticos, isotrópicos y homogéneos.

### 3.1.3 Delimitación de las dimensiones y funciones de distribución de fibra

Li et al [33] propone una distribución aleatoria de las fibras considerando el ángulo de inclinación de dichas fibras respecto a la normal al plano de la fisura. La distribución aleatoria de fibras en la matriz es equivalente a suponer una probabilidad de que la parte final de la fibra está enterrada en algún lugar en la superficie semiesférica. Esto se muestra en la figura 3.3:

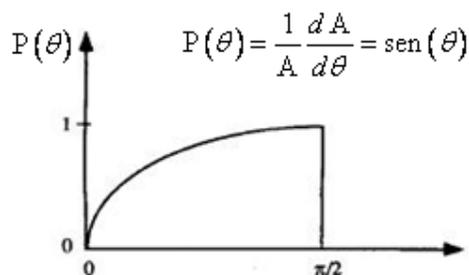
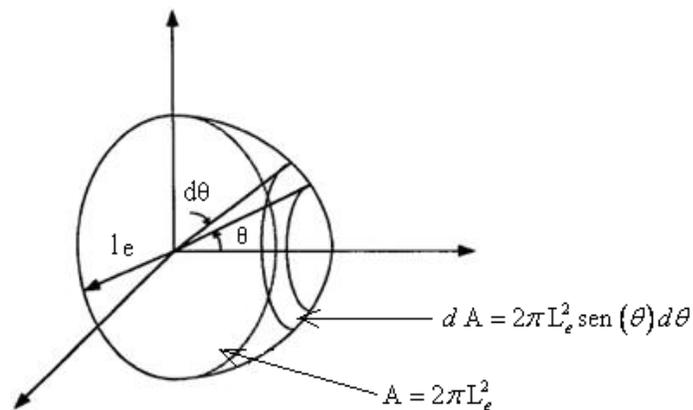


Fig.3.3: Orientación 3-D randómica de la fibra donde la longitud enterrada tiene su parte final en la superficie hemiesférica y la probabilidad  $P(\theta)$ .

### 3.1.4 Layout de la fibra en relación a la superficie de la fisura

Se puede observar en la figura 3.4 la inclinación  $\theta$  de la fibra respecto al vector normal a la superficie de la fisura. La longitud enterrada de dicha fibra en la matriz está representada por  $l_e$ .

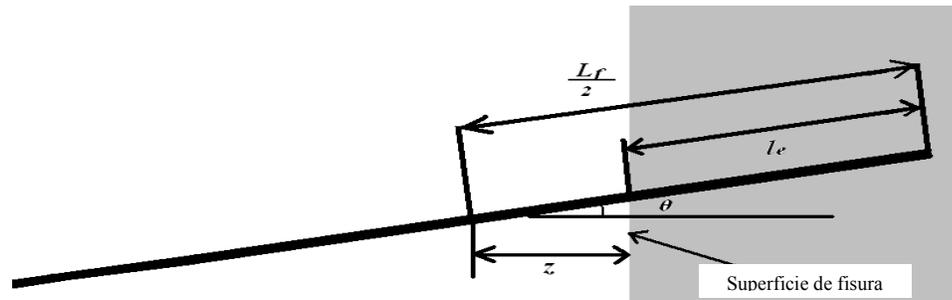


Fig. 3.4: Fibra inclinada y con parte enterrada en la matriz.

### 3.1.5 Fibra sin deformación

En la figura de abajo se grafica una fibra antes de la deformación debido a la propagación de la fisura. La longitud libre inicial se puede considerar como  $2l_0$ .

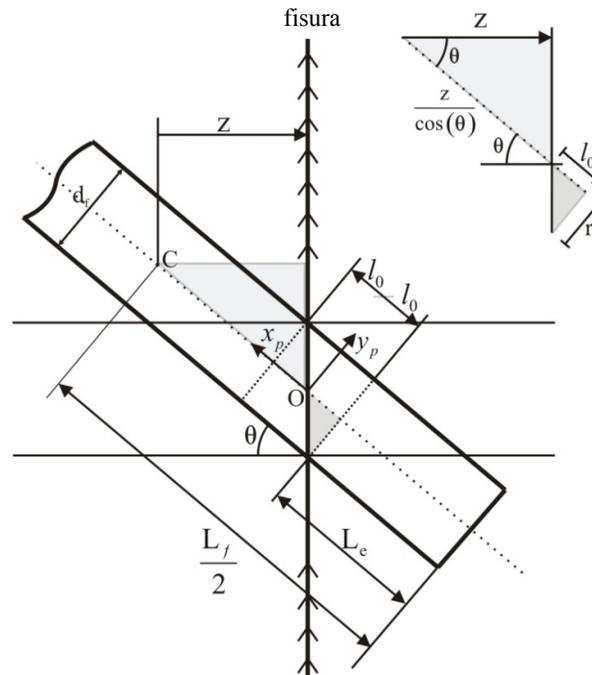


Fig. 3.5: Configuración de la fibra antes de la apertura de la fisura.

Claramente, por la geometría, se tiene que la longitud enterrada de la fibra inicialmente está dada por:

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \theta} - l_o \quad 3-1$$

Observando  $l_o$  en la figura, tenemos que:

$$\tan(90 - \theta) = \frac{r}{l_o} \quad 3-2$$

Por relaciones trigonométricas:

$$l_o = r \tan \theta \quad 3-3$$

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \theta} - \frac{d_f \cdot \tan \theta}{2} \quad 3-4$$

Para  $L_e > 0$ , obtenemos

$$0 < z < \frac{L_f}{2} \cos \theta - \frac{d_f \cdot \text{sen} \theta}{2} \quad 3-5$$

Donde  $z$  es la distancia desde el centro de la fibra hasta el plano de la fisura.

De  $l_o = r \tan \theta$ , tenemos

$$d_f \tan \theta = 2l_o < \frac{L_f}{2} \quad 3-6$$

LI et al [33], sugiere que

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Más Observando la figura, verificamos que el ángulo de inclinación de la fibra que realmente contribuirá con la tenacidad se ve limitado por:

$$\theta < \arctan \frac{L_f}{d_f} \quad 3-7$$

Así las probabilidades de que el ángulo  $\theta$  y la distancia  $z$  acontezcan está dada por

$$P(\theta) = \sin(\theta) \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{L_f}{d_f}\right)$$

$$p(z) = \frac{2}{L_f} \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta)}{2}$$
3-8

### 3.1.6 Tensión de puente proveniente de las fibras en el plano de la fisura

De acuerdo con Li et al [33] la tensión de puente está relacionada con la apertura  $w$  con la fuerza de puente  $N$  de cada fibra, que es esencial para calcular el aumento de la tenacidad a la fractura según la ecuación

$$\sigma_c(w) = \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta$$
3-9

Donde  $N(w, \theta, z)$  es la fuerza axial en la fibra en su respectivo eje.

### 3.1.7 Aumento de energía de fratura $G_c$

El aumento de la energía de fratura  $G_c$ , o sea, el aumento de la tenacidad, con unidades  $J/m^2$ , se obtiene a través del área bajo la curva  $\sigma_c - w$ , o sea:

$$G_c = \int_0^{w^*} \sigma_c(w) dw$$
3-10

Donde  $w^*$  es la abertura suficiente para que todas las tensiones en las fibras sean cero (fibras quebradas o fuera de la matriz).

### 3.2. METODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS

En el Método de los Elementos Discretos se considera al medio modelado como un sistema de partículas discretas, generalmente de forma esférica y masa conocida. En el método cada partícula es identificada separadamente y sus posiciones instantáneas son determinadas a partir de las ecuaciones de movimiento.

Cundall aparece como uno de los principales precursores del método (Cundall, 1971 y 1979). El método que propuso se basa en realizar una integración explícita de las ecuaciones de movimiento de una estructura formada por partículas rígidas con masas conectadas entre sí, mediante resortes y amortiguadores.

El MED fue aplicado con gran éxito en el modelado numérico de procesos que envuelven un comportamiento discontinuo predominante, relacionado con sólidos no cohesivos. También ha sido aplicado con suceso en el estudio de materiales susceptibles de fracturar, donde la hipótesis de medio continuo, base de los métodos numéricos tradicionales (elementos finitos y de contorno) es violada.

Como ejemplos se pueden citar el transporte de sedimentos en un fluido (Goth e Sakai, 1997 e Ching-Jang Lin, 2000), modelado de filtros con capas granulares (C.S. Chou, 2000). También se utilizó en el modelado de procesos de degradación y fractura en sólidos cohesivos, entre los cuales pueden ser citados: simulación de explosión en rocas (Ladislav, 2003, Procházka, 2004), fractura de materiales compuestos como el hormigón, por ejemplo (Sawamoto, 1998, Camborde, 2000, Brara 2001, Wittel, 2003).

Particularmente, a través de la formulación del MED utilizada en este trabajo, fueron modelados procesos de fractura dinámica en rocas, producto de terremotos (Dalguer y otros, 2003), impacto en concreto armado (Riera, 1980, 1984), procesos de fractura en hormigón y hormigón armado (Iturrioz y Riera, 1998), simulación del comportamiento de suelos frente a cargas explosivas (Iturrioz y Riera 2001), simulación de propagación dinámica de fisuras (Spellmeyer y otros 2001), problemas de impacto en materiales compuestos poliméricos (Barrios D'Ambra y otros 2002 y 2003), fenómenos de fractura por impacto en polímeros (Barrios y otros, 2004). También existen trabajos previos en los cuales se presenta la determinación de parámetros fractomecánicos con el MED publicados por Tech y otros en 2003. Parte de los trabajos de Kosteski y otros 2004 y 2006, y Barrios D'Ambra y otros 2006, pertenecen al trabajo realizado para esta disertación.

En otro abordaje, algunos trabajos combinan el método de los elementos discretos con el método de los elementos finitos (Gethin, 2001, Munjiza, 2002, 2004, entre otros).

### 3.2.1. Características de la formulación del método utilizada en este trabajo.

La formulación original fue propuesta por Nayfeh y Hefzy en 1978 (citado por Hayashi) que reemplazaron una estructura reticulada espacial por un continuo equivalente, para disminuir la cantidad de grados de libertad y disminuir así el esfuerzo computacional.

El modelo de discretización empleado en este trabajo fue desarrollado por Hayashi 1982 y verificado también por Rocha 1989 e Iturrioz 1995.

El Método de los Elementos Discretos consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo por medio de un reticulado espacial formado por la repetición de un módulo regular. Las rigideces de las barras que componen el reticulado son equivalentes a la del continuo que se quiere representar. Como se consideran barras de reticulado espacial, por cada nudo se tienen tres grados de libertad. La masa del modelo es discretizada y concentrada en los nodos del reticulado espacial ya mencionado.

La figura 3.7 muestra el arreglo cúbico básico o módulo. Este módulo está compuesto de ocho nodos en sus vértices más un nodo central.

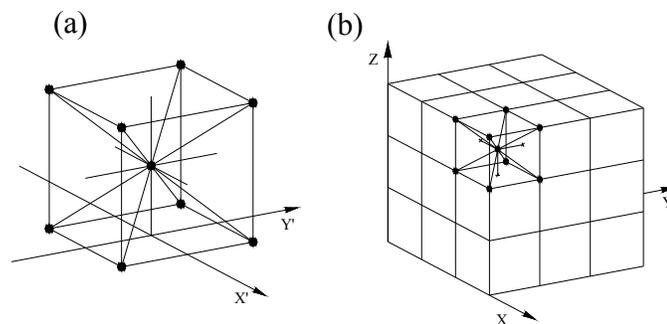


Figura 3.7: a) Detalle del módulo cúbico básico, b) Prisma compuesto por varios módulos cúbicos.

#### 3.2.1.1. Rigidez de las barras equivalentes al continuo.

La equivalencia entre el arreglo cúbico y un sólido elástico ortótropo con los ejes principales del material orientados en la dirección de los elementos longitudinales fue verificada por Hayashi 1982, dentro del campo de la elasticidad lineal. Sólo debe ser impuesta la restricción  $\nu = 0.25$  al valor del módulo de Poisson para que la equivalencia sea perfecta, es decir que el material se comporte como isotrópico. Para otros valores de  $\nu$  aparecen pequeñas diferencias en los términos de corte, estas diferencias pueden despreciarse sobre todo cuando se está interesado en la respuesta no lineal del modelo estudiado.

A continuación se presenta en forma resumida las deducciones que permiten llegar a las constantes elásticas de un sólido y a las rigideces equivalentes de las barras para el módulo cúbico presentado en la figura 3-1, las cuales fueron desenvueltas en las tesis de Hayashi 1982 e Iturrioz 1995 y en el trabajo de Nayfeh y Hefzy 1978.

La relación constitutiva de un cuerpo elástico arbitrario, en notación indicial, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (i, j = 1 \dots 6) \quad 3-11$$

En el caso del cuerpo anisótropo y elástico la matriz de las constantes elásticas,  $C_{ij}$ , queda definida conociendo 21 parámetros independientes. Si el material es isótropo, es posible realizar simplificaciones que permiten expresar la matriz  $C_{ij}$  en función apenas de dos constantes independientes. En este último caso, se puede escribir  $C_{ij}$  como sigue:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad 3-12$$

Donde  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$  son funciones del módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y del coeficiente de Poisson  $\nu$ .

Como se están analizando estructuras reticuladas a partir de elementos unidireccionales es de esperar que cada elemento contribuya a la rigidez global de la estructura y la suma de las contribuciones medias de cada barra forme la matriz final.

Como todas las barras poseen el mismo módulo de elasticidad  $E$ , cada conjunto de barras paralelas define un continuo con una propiedad unidireccional efectiva, que será llamada  $Q_{11}$ . Como  $Q_{11}$  es tomado como un valor medio ponderado con relación al área de influencia de la barra en un determinado conjunto de barras paralelas, su valor dependerá de la separación entre estas barras.

El elemento cúbico de la figura 3-1 posee dos valores diferentes para  $Q_{11}$ , uno correspondiente a las columnas que son normales a las caras del cubo y otro correspondiente a las barras diagonales. Estas propiedades serán diferenciadas respectivamente por  $Q_{11}^n$  y  $Q_{11}^d$ . Para una estructura cúbica el valor del parámetro  $Q_{11}^n$  puede ser fácilmente determinado proyectando el área de las barras en una cara del cubo como se muestra en la figura 3-2 a).

Entonces en cada cara del módulo cúbico de área  $Lc^2$  se tiene una contribución de dos barras normales enteras. De esta forma, cada elemento tiene un área efectiva de contribución

igual a  $(Lc^2/2)$ . Por eso, la relación entre la rigidez de la barra  $E A_n$  y el área efectiva de contribución de la misma provee el valor medio de una propiedad unidireccional efectiva en la dirección de las barras normales a las caras del módulo  $Q_{11}^n$ :

$$Q_{11}^n = \frac{E \cdot A_n}{Lc^2/2} \quad 3-13$$

En forma similar se procede para obtener el valor medio de la propiedad unidireccional en la dirección de las barras diagonales en relación a las caras del módulo cúbico  $Q_{11}^d$ . Se debe también, determinar el área efectiva de contribución de cada diagonal, la cual es indicada en la figura 3.8 b). Luego,  $Q_{11}^d$  está dado por la expresión:

$$Q_{11}^d = \frac{\sqrt{3} \cdot E \cdot A_d}{Lc^2} \quad 3-14$$

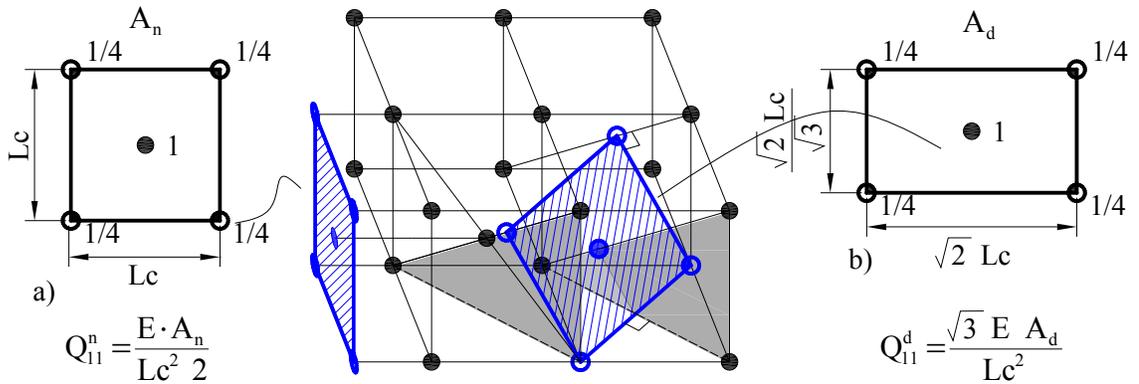


Figura 3.8: Determinación del área efectiva de las barras  
a) normales y b) diagonales.

En la representación del continuo utilizada en este trabajo, a través de la estructura reticulada, es necesario que se considere la influencia de cada barra en la rigidez del sólido equivalente, o sea, una rigidez global. Para esto es utilizada la ecuación 3-15 (Nayfe y Hefz 1979, Iturrioz 1995), que permite la transformación de las constantes elásticas de un sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $x_i$  para otro cuyas coordenadas son  $\bar{x}_j$ .

$$\bar{Q}_{ij} = \sum_{I=1}^3 f_I(Q_{11}^n, \alpha_{Ikl}^n) + \sum_{J=1}^4 f_J(Q_{11}^d, \alpha_{Jkl}^d) \quad (k,l = 1, 2, 3) \quad 3-15$$

Donde  $\alpha_{ij}^n$  y  $\alpha_{kl}^d$  son los cosenos directores de los sistemas cartesianos  $\bar{x}$ ,  $x_1^n$  y  $\bar{x}$ ,  $x_1^d$  respectivamente.  $\bar{Q}_{ij}$  representa las constantes elásticas del sólido equivalente representado por la estructura reticulada.

El primer término corresponde a la contribución de las barras normales a las caras del módulo cúbico y el segundo término corresponde a las cuatro direcciones de las diagonales del cubo.

Trabajando con las ecuaciones 3-13 a 3-15 se obtiene:

$$\begin{aligned} C_{11} &= Q_{11}^n \cdot \left(1 + \frac{4}{9} \cdot \delta\right) \\ C_{12} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot \delta\right) \\ C_{44} &= Q_{11}^n \cdot \left(\frac{4}{9} \cdot \delta\right) \end{aligned} \quad 3-16$$

Dónde:

$$\delta = \frac{Q_{11}^d}{Q_{11}^n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{A_d}{A_n} \quad 3-17$$

Sustituyendo las expresiones de  $C_{ij}$  en la matriz (3-12) se obtiene:

$$C_{ij} = \frac{2 \cdot E \cdot A_n}{Lc^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} \cdot \delta & 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} \cdot \delta & \frac{4}{9} \cdot \delta & 1 + \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} \cdot \delta \end{bmatrix} \quad 3-18$$

Que es la expresión propuesta por Nayfeh y Hefzy 1978, donde  $A_n$  y  $A_d$  son datos del problema. En el trabajo de Nayfeh y Hefzy 1978 se aclara que la ecuación 3-18 es equivalente a la matriz de rigidez de un material isótropo y homogéneo sólo en el caso en que  $\delta = 9/8$  (lo que implica que  $\nu = 0.25$ ). Para otros valores de  $\nu$  la equivalencia no es perfecta y las diferencias se concentran en los términos de corte (Iturrioz 1995).

Las constantes elásticas  $E$ ,  $\nu$  y  $\mu$  pueden ser obtenidas para el continuo equivalente a partir de los correspondientes  $C_{ij}$  de la expresión anterior, como sigue:

$$\begin{aligned}
 E &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}} \\
 \nu &= \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \\
 \mu &= \frac{1}{2}C_{44}
 \end{aligned}
 \tag{3-19}$$

Considerándose las ecuaciones 3-18 y 3-19, es obtenida la relación entre las constantes elásticas  $E$ ,  $\nu$  y  $\mu$  y las constantes elásticas del sólido equivalente de la estructura reticulada, ecuación 3-20.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{2 \cdot E \cdot A_n \cdot (9 + 12\delta)}{Lc^2 \cdot (9 + 8 \cdot \delta)} \\
 \nu &= \frac{4 \cdot \delta}{9 + 8 \cdot \delta} \\
 \mu &= \frac{8 \cdot E \cdot A_n \cdot \delta}{9 \cdot Lc^2}
 \end{aligned}
 \tag{3-20}$$

Como lo que interesa es obtener las rigideces de las barras ( $E A_n$ ) y ( $E A_d$ ) en función de las propiedades elásticas del sólido que representa,  $E$ ,  $\nu$ , simplemente reemplazamos estos valores en la ecuación 3-17 obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{9 \cdot \nu}{(4 - 8 \cdot \nu)} \\
 E \cdot A_n &= \frac{Lc^2 \cdot (9 + 8 \cdot \delta)}{2 \cdot (9 + 12 \cdot \delta)} \cdot E \\
 E \cdot A_d &= \frac{2 \cdot \delta \cdot E \cdot A_n}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}
 \tag{3-21}$$

Estas expresiones son válidas si el módulo o arreglo básico de barras es cúbico, como el mostrado en la figura 3-2 a).

Para una célula básica de forma diferente, se deben obtener nuevas relaciones. Bush y otros 1977 y Noor y Mikulas 1988 (citados por Hayashi 1983 e Iturrioz 1995) presentan estas relaciones para tetraedros, en cuanto otros autores proponen realizar el cálculo de las rigideces de las barras directamente por calibración numérica. Schlangem 1993 realizó una revisión bibliográfica de varios tipos de arreglos utilizados en el modelado de estructuras de hormigón. Ostoja y Starzenski 1995 también presentan el cálculo de propiedades equivalentes de barras para el caso en que existe ortotropía utilizando células tetraédricas.

### 3.2.1.2. Masas nodales.

Como se comentó anteriormente, la masa del cuerpo simulado se discretiza y se la coloca en los nudos del reticulado, y el valor de la misma depende del volumen de influencia del nudo. Considerándose el módulo cúbico básico de las figuras 3-1 a) o 3-2, se puede observar que en el volumen de dicho módulo ( $Lc^3$ ) están comprendidos dos nudos, el central y la suma de la octava parte que aporta cada nudo de las aristas del módulo.

Como la masa del continuo comprendida dentro de ese volumen elemental es  $\rho \cdot Lc^3$ , siendo  $\rho$  la densidad del material, la masa de cada nudo completo deberá ser la mitad ( $\rho \cdot Lc^3/2$ ).

Los nudos del vértice del modelo global tienen solamente un octavo de la masa de un nudo completo, por lo tanto su masa será de  $\rho \cdot Lc^3/16$ . Los nudos de las aristas del modelo global tendrán un cuarto de la masa del nudo completo ( $\rho \cdot Lc^3/8$ ) y los nudos pertenecientes a las caras o superficies del modelo global la mitad ( $\rho \cdot Lc^3/4$ ).

### 3.2.1.3. Solución de la ecuación de equilibrio.

Como se explicó anteriormente se consiguió representar el continuo por un sistema tridimensional de  $n$  grados de libertad.

Para cada nudo de masa  $\mathbf{m}$  es considerado el sistema de fuerzas representado en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3.9. Quedando la ecuación de movimiento para el sistema completo:

$$M \cdot \ddot{\bar{x}} + C \cdot \dot{\bar{x}} + \bar{F}(t) - \bar{P}(t) = 0 \quad 3-22$$

Donde  $\bar{x}$  representa el vector de desplazamientos nodales,  $M$  la matriz de masa nodal (diagonal),  $C$  es una matriz de amortiguamiento, también considerada diagonal, y  $\bar{F}(t) - \bar{P}(t)$  representa la diferencia entre el vector de fuerzas internas  $\bar{F}(t)$  y el vector de fuerzas externas  $\bar{P}(t)$ . Se considera que estas fuerzas actúan sobre los nudos del modelo.

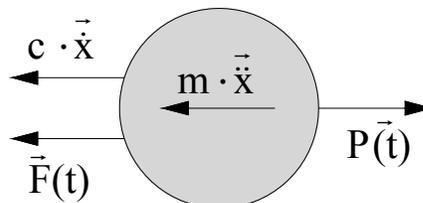


Figura 3.9: Diagrama de cuerpo libre para un nudo.

Para cada nodo  $i$  del modelo se verifica que:

$$\vec{F}^i(t) = \sum_{b=1}^k \vec{F}^b \quad 3-23$$

Siendo  $k$  el número de barras que concurren al nudo  $i$ . La fuerza interna en cada barra,  $\vec{F}^b$ , es obtenida a partir de una ecuación constitutiva elemental, que se puede expresar como sigue:

$$\vec{F}^b = \lambda(\varepsilon_b, \dot{\varepsilon}_b) \quad 3-24$$

Siendo que  $\varepsilon_b$  y  $\dot{\varepsilon}_b$  representan la deformación y la velocidad de deformación de la barra  $b$  y  $\lambda$  será una función que dependerá del tipo de material a modelar (relación constitutiva).

La ecuación de equilibrio 3-22 es integrada en el tiempo valiéndose de un esquema de integración explícita, utilizando el método de diferencias finitas centrales, de manera de obtener la coordenada actual del nudo en cada paso de integración.

En relación a la matriz de amortiguamiento  $C$ , se adoptó la hipótesis simplificativa de considerar el amortiguamiento proporcional a la masa  $M$  (Iturrioz, 1995).

$$C = M \cdot D_f \quad 3-25$$

Siendo  $D_f$  una constante vinculada al coeficiente de amortiguamiento crítico  $\xi_n$ .

$$D_f = \xi_n \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \quad 3-26$$

Dónde  $f_n$  es la frecuencia natural de vibración de modo  $n$  (Hz). De un modo general el modo  $n$  es adoptado como siendo igual al modo fundamental de vibración de la estructura (Iturrioz 1995).

#### 3.2.1.4. Relación constitutiva de la barra para modelar la rotura del material.

Rocha 1989 propuso una ley constitutiva bilineal para los elementos que permite capturar el comportamiento de materiales hasta la ruptura, la misma se presenta en figura 3.10. Como menciona Rocha, esta ley fue propuesta originariamente por Hilleborg en 1978.

La relación constitutiva de cada barra tiene la siguiente forma:

$$\text{Fuerza} = \text{función (deformación de la barra)} \quad 3-27$$

El comportamiento a compresión de la barra es lineal elástico, la ruptura del modelo global cuando está comprimido, deberá ocurrir por tracción indirecta (efecto de Poisson).

En la figura,  $P_{cr}$  representa la fuerza máxima de tracción transmitida por la barra,  $\varepsilon_p$  es la deformación asociada a  $P_{cr}$ ,  $E_A$  es la rigidez de las barras del modelo reticulado y  $k_r$  es la ductilidad, parámetro que permite calcular la deformación para la cual la barra no transmite más esfuerzos de tracción,  $\varepsilon_r$ .

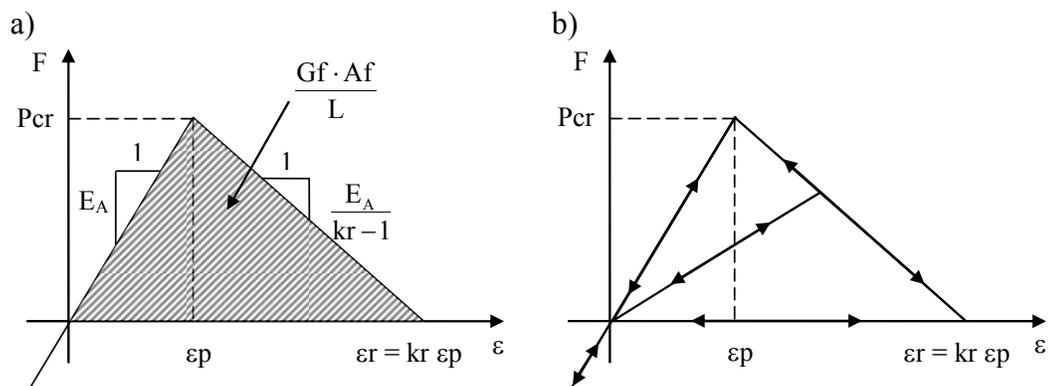


Figura 3.10: Relación Constitutiva Elemental de las barras del reticulado – a) Diagrama constitutivo adoptado con sus parámetros de control; b) Esquema para la carga y descarga. (Rocha 1989).

La deformación límite  $\varepsilon_r$  es elegida para satisfacer la condición de que cuando un elemento falla y la fisura se abre, se disipa una cierta cantidad de energía. Esta energía es igual al producto del área de la superficie fracturada,  $A_f$ , la cual está relacionada con  $L_c$ , por el valor de la tasa de energía superficial  $G_f$ , que es una propiedad del material.

Las propiedades del material pueden ser modeladas como campos aleatorios, lo que implica que las mismas pueden variar de elemento a elemento siguiendo una ley estadística establecida.

Es importante destacar que  $P_{cr}$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $G_f$ , y  $R_f$  son propiedades exclusivas del material,  $A_f$  y  $L_c$  son propiedades exclusivas del modelo, los parámetros  $E_A$  y  $kr$  dependen tanto del modelo como del material.

Considerando que el material en estudio tiene comportamiento frágil, puede ser aplicada la mecánica lineal de fractura. El factor de intensidad de tensiones para el modo de falla I ( $K_I$ ), presentado en Anderson 2005, puede ser escrito como:

$$K_I = \chi \cdot f_t \cdot \sqrt{a} \quad 3-28$$

Siendo  $\chi$  un parámetro que depende de la geometría del problema y de la longitud de la fisura.

Considerando el comportamiento lineal hasta la ruptura ( $f_t = \varepsilon_p E$ ) y estado plano de deformaciones, la deformación crítica es dada por:

$$\varepsilon_p = R_{fc} \cdot \sqrt{\frac{G_f}{E \cdot (1 - \nu^2)}} \quad 3-29$$

Dónde:

$$G_f = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \quad 3-30$$

Rfc es un “factor de falla” definido como:

$$Rfc = \frac{1}{\chi \cdot \sqrt{a}} \quad 3-31$$

La relación entre  $\epsilon_p$  y  $G_f$  fue establecida como criterio de falla a tracción y su deducción está basada en la mecánica de fractura lineal elástica (Rocha 1989).

Como cita Iturrioz 1995, es posible introducir mejoras sobre el comportamiento del modelo en función de investigaciones realizadas por varios autores; entre ellos, cabe destacar los trabajos de Vonk 1993 y de Borst y Feenstra 1993. También puede ser cuestionada la forma por la cual se realiza la descarga. Linde 1993 propone una ley más sofisticada, basada en los ensayos realizados por Curbach 1987, que fue probada en casos de excitaciones impulsivas sin obtener ventajas en los resultados obtenidos. Presumiblemente, en problemas donde el comportamiento cíclico de la excitación sea dominante, cargas sísmicas por ejemplo, su utilización traerá ventajas.

#### *Observaciones sobre la implementación del criterio de rotura utilizado*

- Es importante precisar que  $\epsilon_p$ ,  $E$ ,  $P_{cr}$ ,  $R_f$  y  $G_f$  son considerados propiedades exclusivas del material, mientras que  $A_f$  y  $L_c$  son propiedades exclusivas del modelo.  $k_r$  y  $E_A$  dependen tanto del material como del modelo.
- Se puede demostrar que el criterio constitutivo utilizado es objetivo frente a la discretización del modelo.
- Una condicionante del modelo en la definición de  $L_c$  es la siguiente:

Cuando un elemento rompe, toda la energía de deformación acumulada en él, es consumida en el proceso de fractura. Esto no es lo que sucede en realidad, pues parte de la energía de deformación se preserva con la forma de energía cinética (vibraciones inducidas) y energía elástica, en las dos partes en las que el elemento se divide. Como no es posible tener en cuenta esta subdivisión para un elemento aislado (porque las masas están concentradas en los nudos, y no a lo largo de su longitud), esto resulta una restricción en términos de un valor máximo para la longitud de  $L_c$ .

### **3.2.2. Integración por diferencias finitas**

La integración explícita presenta la gran ventaja de realizar un balance energético durante todo el proceso, constituyendo una información de gran utilidad para comprender los

fenómenos estudiados. Esta evaluación de la respuesta en el tiempo permite no perder de vista el problema físico que a veces se pierde en las dificultades de índole numéricas.

Otra ventaja es que la integración explícita no requiere del montaje y armado de la matriz de rigidez. Esto es especialmente conveniente para el análisis dinámico no lineal, en donde en cada paso de integración en el tiempo la matriz de rigidez debe ser modificada. (Riera 1980). Esto también facilita el estudio de estructuras que no estén totalmente vinculadas, como por ejemplo, seguir la trayectoria de los fragmentos en que se rompe una estructura.

Debido a la utilización de un método de integración explícita en la integración de las ecuaciones de movimiento, el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se ve restringido, por condiciones de estabilidad numérica, a un valor crítico  $\Delta t_{\text{crítico}}$ . El método de las diferencias finitas centrales presenta el menor intervalo crítico en comparación con los otros métodos explícitos. Para este modelo se ha adoptado un  $\Delta t_{\text{crítico}}$  en función de la longitud de las barras ( $L_c$ ) y de la velocidad de propagación de la onda de compresión  $V_p$ :

$$\Delta t_{\text{crítico}} \leq 0,6 \cdot \frac{L_c}{V_p} \quad 3-32$$

Con  $V_p = \sqrt{E/\rho}$ .

*El proceso de integración básicamente consiste en:*

- Dada una configuración deformada en el instante  $j$
- Se obtienen las fuerzas internas, en esta configuración, en el instante  $j$ .
- Conocidas las otras fuerzas actuantes en el instante  $j$
- Se determina la configuración deformada en el instante  $j+1$ .

Se pueden encontrar detalles de la implementación de diferencias finitas en libros de métodos numéricos (Burden y Faires 1996, Bathe 1996).

### **3.2.3. Metodología utilizada para obtener el tensor de tensiones**

A continuación se explica como fueron calculadas las componentes del tensor de tensiones y de deformaciones para cada módulo básico. Los resultados fueron adecuados para poder ser visualizados en el programa de elementos finitos ANSYS (Batista y otros 2003).

Toda la descripción realizada a continuación está basada en un módulo cúbico orientado siguiendo las coordenadas globales presentadas en la figura 3.11 (Batista y otros 2003, y Batista 2007).

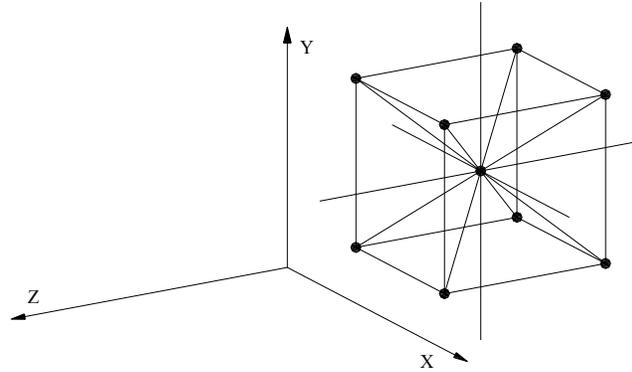


Figura 3.11: Módulo cúbico utilizado como referencia para la explicación de la obtención del tensor de tensiones, orientado con el sistema de coordenadas global.

### 3.2.3.1. Tensiones normales

La tensión normal en cualquiera de las direcciones ortogonales al módulo está determinada por una fuerza equivalente dividida por el área de la sección transversal del módulo. Esta fuerza equivalente está compuesta por:

- El promedio de las fuerzas correspondientes a las barras de las aristas en la dirección analizada.
- El promedio de los valores correspondientes a suma de las fuerzas en las barras diagonales de uno y otro lado proyectadas según la dirección analizada.
- El promedio de las fuerzas en las barras centrales en la dirección analizada.

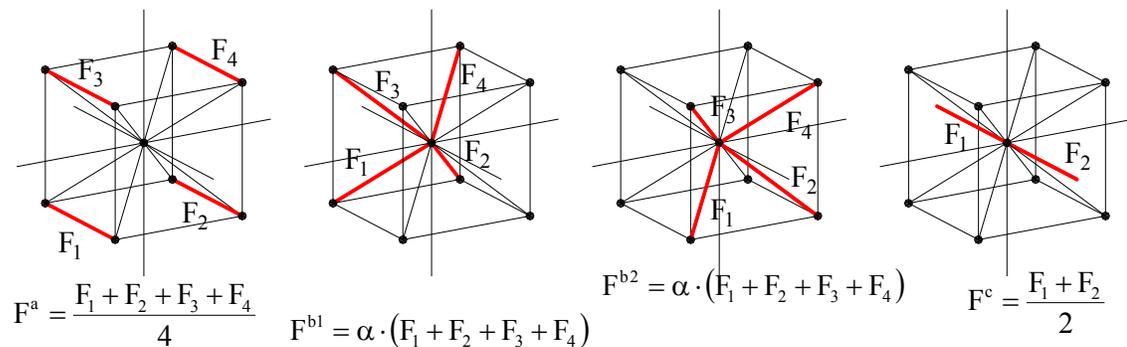


Figura 3.12: Componentes de la fuerza equivalente para el cálculo de la tensión normal.

En la figura aparece el valor  $\alpha$  que es la tangente del ángulo formado por las barras y la dirección ortogonal analizada. Este valor es de 0.577.

La fuerza equivalente se obtiene como la suma de las fuerzas descritas en la figura 3-6.

$$F_{\text{normal equivalente}} = F^a + F^b + F^c \quad 3-33$$

### 3.2.3.2. Tensiones tangenciales

Las tensiones tangenciales solamente incluyen las barras diagonales, y son determinadas también por una fuerza equivalente dividida por el área de la sección transversal del módulo. A continuación se describe a modo de ejemplo como se obtiene la fuerza equivalente en la dirección “x” global en un plano perpendicular a la dirección “y” ( $F_{xy}$ ). Esta fuerza equivalente está formada por:

- El promedio de la diferencia entre la fuerza de la barra superior y la inferior de un lado.
- El promedio de la diferencia entre la fuerza de la barra superior e inferior del otro lado.

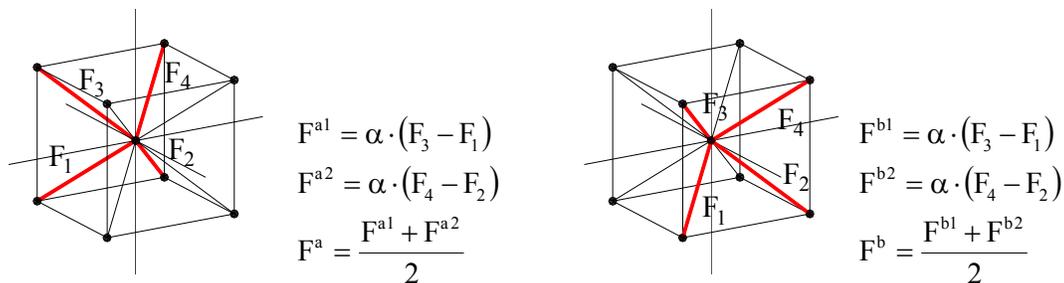


Figura 3.13: Componentes de la fuerza equivalente para el cálculo de la tensión tangencial.

De la misma forma que en la figura 3.13, el valor  $\alpha$  es la tangente del ángulo de las barras diagonales y la dirección ortogonal analizada.

Realizando la sumatoria de las fuerzas se obtiene que  $F_{xy}$  está dado por:

$$F_{xy} = \frac{F^a + F^b}{2} \quad 3-34$$

De la misma manera que se analizó la fuerza equivalente  $F_{xy}$ , siguiendo el mismo procedimiento se pueden calcular  $F_{yz}$  y  $F_{xz}$  (Batista y otros 2003).

Batista y otros 2003 realizaron la comprobación del correcto funcionamiento de la forma de calcular el tensor de tensiones verificando los resultados obtenidos con el MED de problemas cuya solución era conocida.

### 3.2.4. Problemas verificados con el MED

En forma de resumen se presentan a continuación los distintos tipos de problemas que fueron analizados con el MED con la formulación presentada anteriormente y para los cuales demostró ser apto.

- Problemas con no linealidad geométrica. (Hayashi 1982)
- Problemas con no linealidad física y geométrica. (Hayashi 1982)
- Impacto sobre una placa elástica. (Hayashi 1982)
- Aplicaciones en problemas básicos de la MELF. (Rocha1989)
- Simulación de materiales no homogéneos con propiedades aleatorias. (Rocha1989)
- Aplicaciones al Hormigón. Corroboración de la teoría de banda de fisuración de BAZANT. (Rocha1989)
- Aplicación del DEM a estructuras elastoplásticas. Iturrioz (1995)
- Análisis de estructuras de Hormigón Armado sometido a cargas de impacto e impulsivas. Iturrioz (1995).

Con los ejemplos presentados en esta disertación se demuestra que el MED también es apto para:

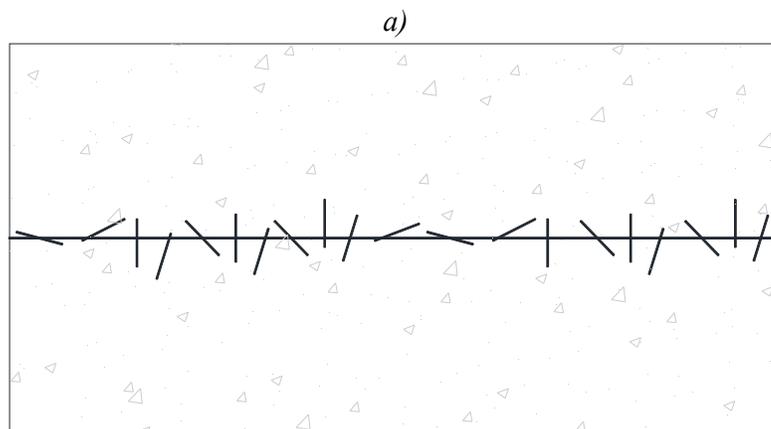
- Medir el factor de intensidad de tensiones estático para modos de falla simples o mixtos, en 2 y 3 dimensiones. Aplicando la tasa de energía liberada y el COD.
- Medir el factor de intensidad de tensiones dinámico para modos de falla simples o mixtos, en 2 y 3 dimensiones. Aplicando el COD.
- Calcular la velocidad y camino de propagación de una fisura.
- Captar la propagación de ondas de tensión y la influencia de los bordes o contornos libres en esta distribución de tensiones.
- Reproducir configuraciones de rotura complejas (como las de impacto del disco) y los mecanismos de fractura producidos.

## CAPÍTULO 4 - PROBLEMA EN ESTUDIO - MODELO FÍSICO

Se realiza el estudio de un material compuesto de matriz frágil reforzado por fibras cortas. La matriz se encuentra fisurada y es solicitada por una excitación perpendicular a la dirección de la fisura. Dicha matriz es cortada en dos partes por la fisura mencionada y las fibras tienen la misión de unir ambas partes de la matriz.

Se conoce el porcentaje volumétrico de fibras en el compuesto ( $V_f=1\%$ ) y módulo de elasticidad de la matriz ( $E_m$ ).

Las fibras tienen una distribución aleatoria, con un ángulo  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  respecto de la normal del plano de la fisura y distintas longitudes enterradas, como se puede observar en la figura 4.1.



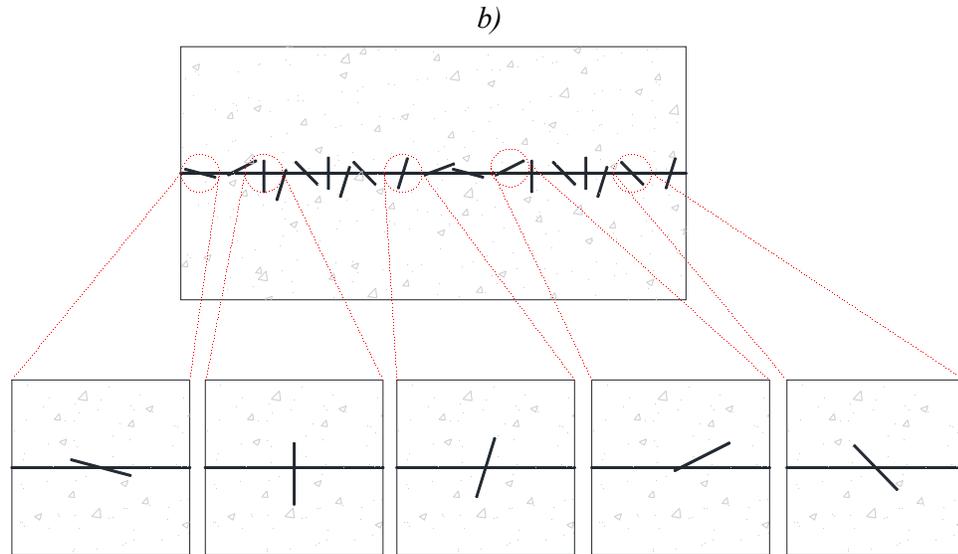


figura 4.1: a) Material compuesto reforzado con fibras cortas; b) Fibras aisladas dentro del material compuesto.

Entonces, para poder determinar el aumento en la tenacidad del compuesto que generan estas fibras, tomamos cada una de ellas en forma individual y obteniendo la fuerza de Puente que cada una toma en forma aislada (figura 4.2), para luego sumar todas esas fuerzas individuales y obtener la fuerza de puente total debido al aporte de todas las fibras que cruzan la fisura. A continuación se determina la tensión en el compuesto debido a dicha fuerza de puente total, para finalmente hallar el área bajo la curva  $\sigma_c - w$  que representa la energía de fractura del compuesto.

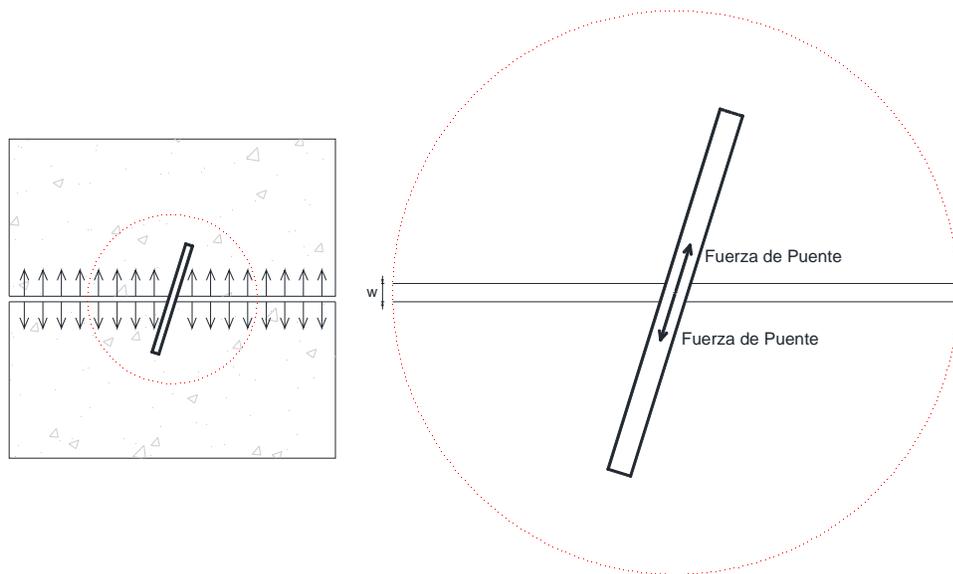


figura 4.2: Fuerza de puente de una fibra aislada dentro de la matriz.

Esta metodología se puede observar en la figura 4.3.

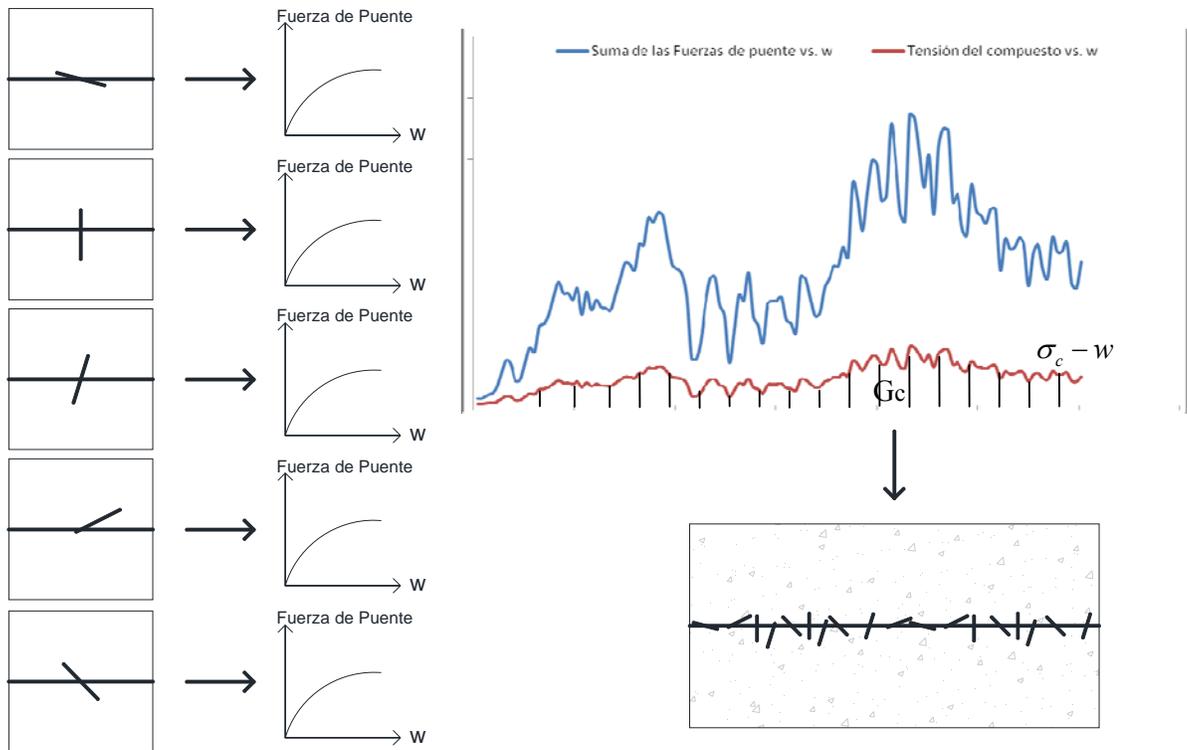


figura 4.3: Metodología utilizada en el trabajo para obtener el valor de tensión en el compuesto y energía de fractura del compuesto. Se observa que primero se obtienen las fuerzas de puente de cada fibra aislada, para luego sumarlas y obtener la fuerza de puente total (curva azul), y luego la tensión del compuesto (curva roja). Finalmente, la energía de fractura del compuesto  $G_c$  es el área bajo la curva  $\sigma_c - w$ .

En primer lugar, de la simulación de cada fibra interviniente en la mejoría de la tenacidad a la fractura del material, se obtuvo la fuerza de puente que resiste cada una de estas. Para esto, se hizo variar el ángulo de inclinación de fibra en intervalos de  $10^\circ$ , desde una inclinación de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , y se fue incrementando la distancia  $z$  (distancia desde el baricentro de la fibra al plano de la fisura) en intervalos iguales al espesor de fibra. Se obtuvieron así 9 intervalos respecto de  $\theta$  y 10 intervalos respecto de  $z$ , dando un total de 90 simulaciones con el fin de poder estudiar la contribución de cada fibra con posibilidad de intervenir en el aumento de la mejoría en el rendimiento del compuesto.

Luego se graficaron las curvas fuerza de puente vs. apertura de fisura ( $w$ ) para cada caso analizado, y de esta manera se obtiene la apertura de fisura crítica  $w^*$ , apertura para la cual todas las fuerzas de puente son cero.

Se realiza la sumatoria de todas las fuerzas de puente que cada fibra aporta individualmente.

A continuación, se aplica la fórmula 3.9 del modelo matemático propuesto por Li et al [33] y se obtiene la tensión de puente en relación a la apertura de fisura  $w$ . En dicha fórmula,  $N(w, \theta, z)$  es la suma de todas las fuerzas de puente de cada fibra individual.  $P(\theta)$  es la función de probabilidad de densidad de ocurrencia de una cierta inclinación  $\theta$  en la distribución 3D que LI et al [33] propone en su modelo matemático. Como se puede observar en la figura 4.3,  $P(\theta) = \text{seno}(\theta)$  para  $\theta$  variando entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Luego,  $p(z)$  es la probabilidad de densidad de que el baricentro de las fibras se encuentren a una distancia  $z$  desde su centro de gravedad hasta el plano de la fisura considerada. Para  $z$  variando entre 0 y  $L_f/2$ , el valor de  $p(z)$  es una constante que vale  $p(z) = 2/L_f$ .

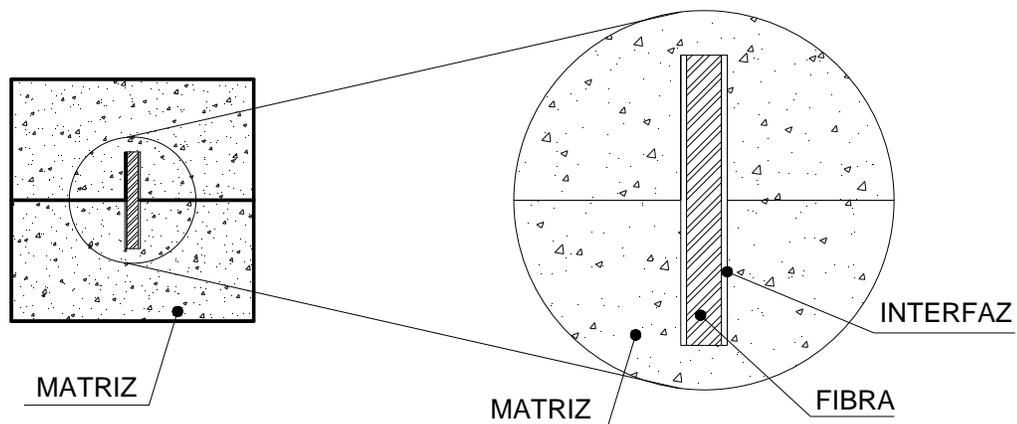
Por último, se aplica la ecuación 3.10 y se obtiene el aumento de la energía de fractura  $G_c$  del compuesto. Dicho valor no es más que el área bajo la curva  $\sigma_c - w$ . De esta manera, fue necesario aplicar algún método de integración para hallar dicho valor  $G_c$ , utilizando el método de integración por trapecios.

## CAPITULO 5 - METODOLOGIA – IMPLEMENTACIÓN EN EL MED

Serán considerados y aplicados conceptos típicos de la Elasticidad y Mecánica de Fractura, proponiendo un modelo mecánico que pueda calcular las fuerzas y tensiones a las que las fibras están sometidas cuando una fisura principal aparece en la matriz frágil, y la contribución de esas fibras para la tenacidad del material compuesto

### 5.1 Configuración geométrica

La geometría y las condiciones de borde del problema se presentan en la Fig. 5.1.



*Figura 5.1: Configuración geométrica del conjunto fibra-matriz fisurada para uno de los casos estudiados en el MED.*

Sobre el modelo se aplican desplazamientos prescritos normales al plano de la fisura. La dirección de estos desplazamientos es normal al plano de la fisura y se presenta en la Fig. 5.2.

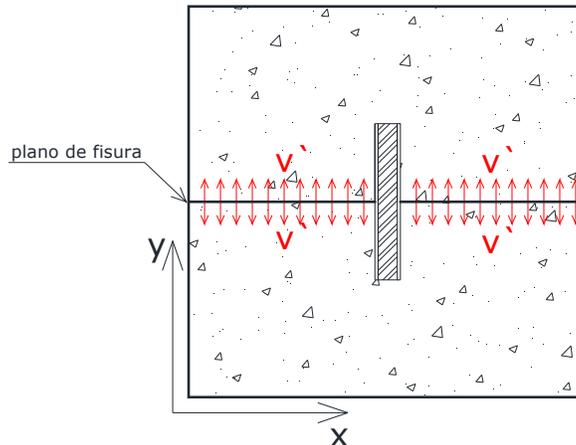


Figura 5.2: Fibra dentro de la matriz fisurada donde se indica la dirección de los desplazamientos prescritos aplicados ( $v$ ).

Estos desplazamientos prescritos fueron aplicados a una velocidad suficientemente baja como para considerar como despreciables los efectos de inercia.

## 5.2 Discretización con el MED – MODELO NUMÉRICO

La formulación del MED aquí empleada consiste esencialmente en la discretización espacial del continuo en módulos de reticulado espacial regulares; siendo la longitud del lado de este módulo denominada  $Lco$ . En este estudio preliminar se consideró el problema como *estado plano de deformaciones*, restringiendo las deformaciones en la dirección perpendicular al plano de la figura. En la Fig. 5.3 se presenta el layout de modelo en MED realizado de la fibra dentro de la matriz fisurada, las cotas están en módulos, siendo que cada módulo tiene un lado  $Lco=0.1mm$ . Cada fibra tiene una longitud  $Lf=10mm$  y un espesor  $df=0,5mm$ .

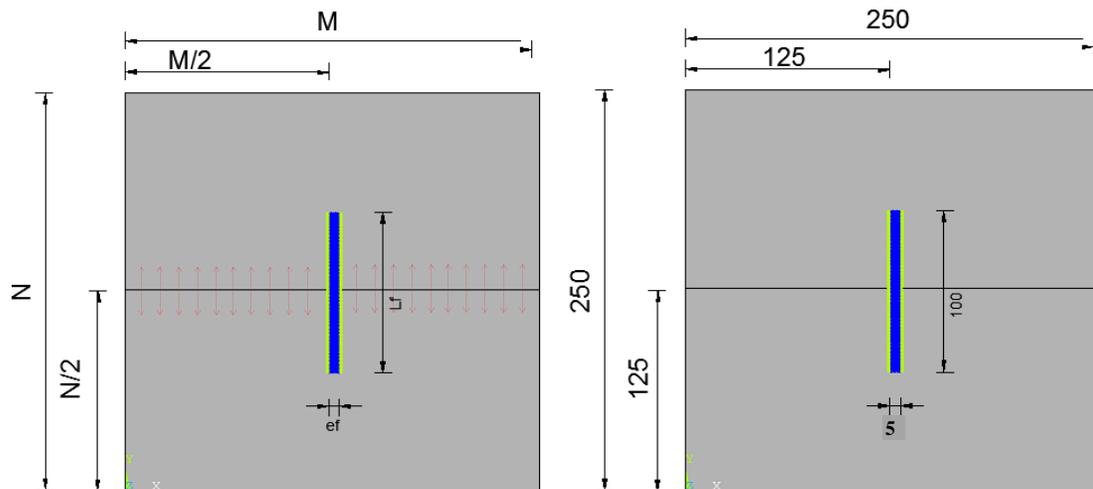


Figura 5.3: Layout de la fibra dentro de la matriz fisurada, indicando la discretización adoptada para uno de los casos estudiados en el modelo de MED, longitudes medidas en módulos ( $1M=Lco=0.1mm$ ).

Para modelar la interfaz fibra-matriz, se utilizó un tercer material dentro del conjunto. Este material adicional tiene un espesor de dos módulos. Para determinar las propiedades mecánicas de este material que simula la interfaz fueron adoptados valores medios entre los de la matriz y la fibra.

En la Fig. 5.4 se muestra un detalle del mallado, donde se puede apreciar las barras y nudos del modelo discretizado. Las barras graficadas en color gris (A) representan a la matriz y sus propiedades mecánicas; las barras azules (C) a la fibra; y por último las barras amarillas (B) a la interface.

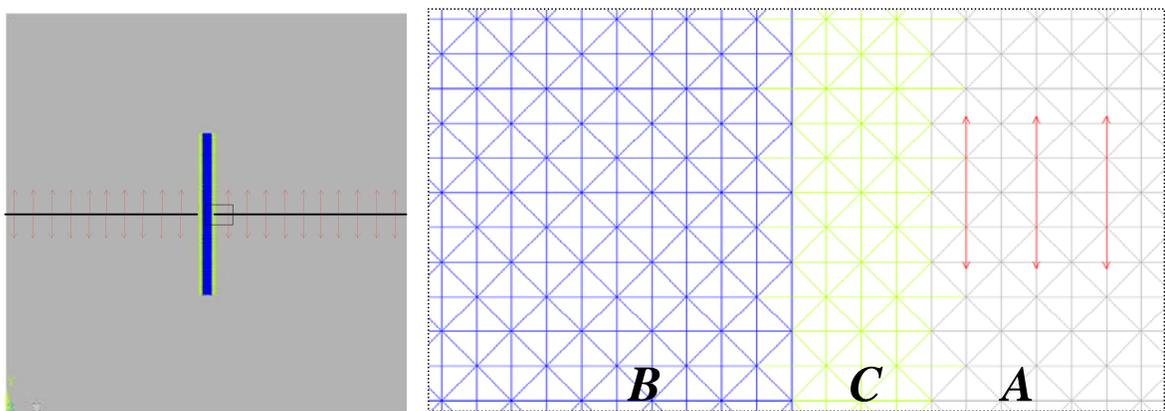


Figura 5.4: Detalle de la modelación de la interface en el modelo elaborado en MED.

Las flechas rojas en figura 5.4 corresponden a los desplazamientos prescriptos aplicados en el modelo y como se puede observar en la figura, dichos desplazamientos se aplican a uno y otro lado del plano de la fisura.

Cabe aclarar que la fisura llega hasta el contorno de la interfaz. En la Tabla 1 se indican los parámetros utilizados en la simulación.

<b>Material</b>	$E$ (N/m <sup>2</sup> )	$G_c$ (N/m)	$Roh$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\epsilon_p$
<b>Matriz (mortero)</b>	3,0 e10	24	2500	0,00126
<b>Fibra (Spectra 900)</b>	1,17 e11	18000	970	0,02222
<b>Interfaz</b>	7,35 e10	9012	2800	0,01795

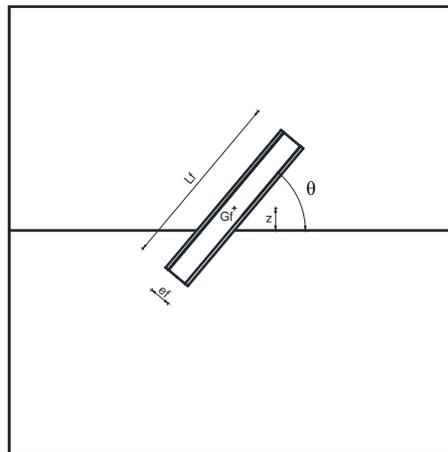
*Tabla 1: Parámetros utilizados en el modelo del MED, considerando una discretización de  $L_{co}=0,1mm$*

## CAPITULO 6 - RESULTADOS

Se presentan los resultados obtenidos del estudio paramétrico. Definiendo los parámetros como:

- $z$  : distancia desde el eje baricéntrico de la fibra al plano de la fisura
- $\theta$  : ángulo de inclinación de la fibra respecto a un plano normal al plano de la fisura
- $G_f$  : baricentro de la fibra
- $L_f$  : longitud de fibra
- $ef$  : espesor de fibra

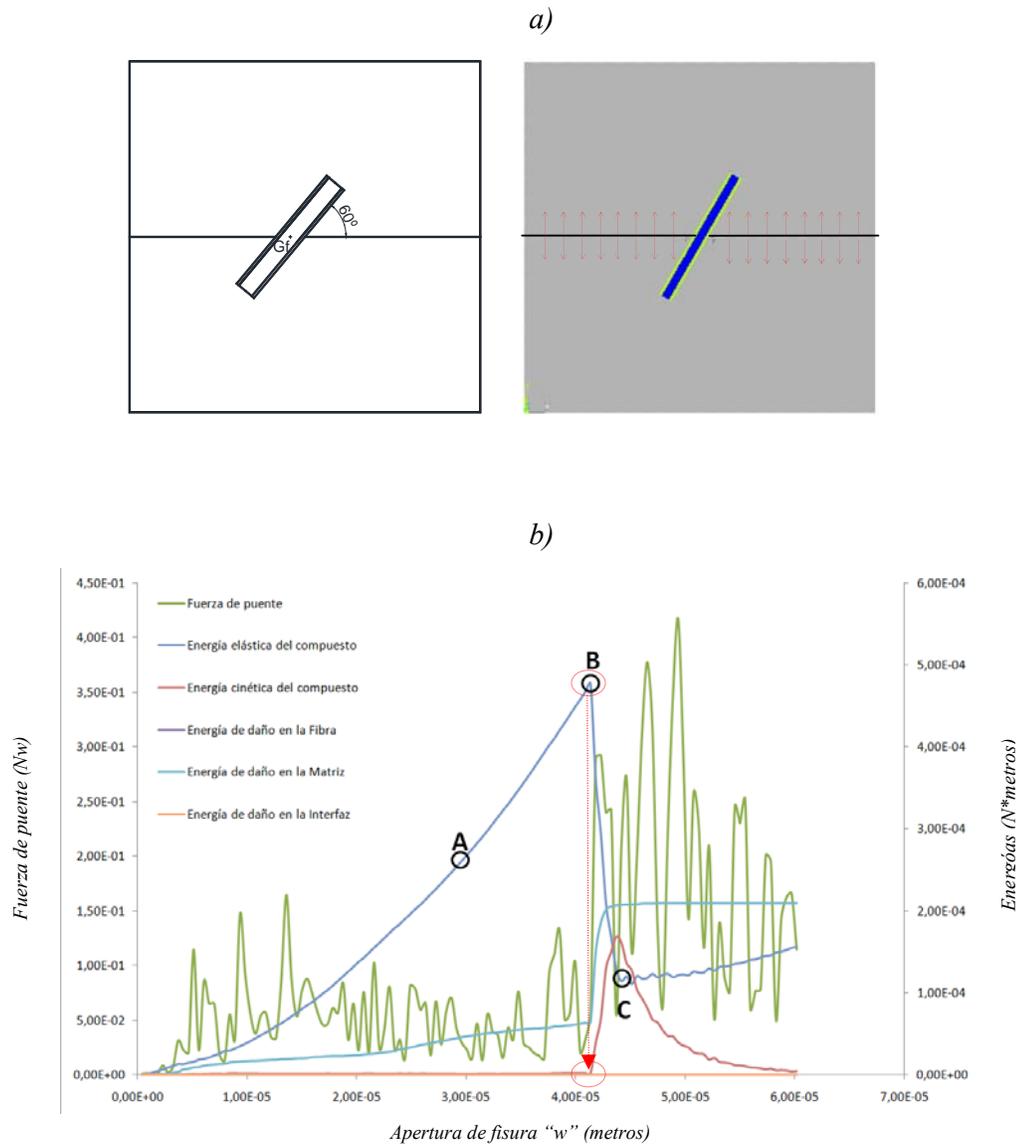
En la figura 6.1 se presentan las variables definidas:



*Figura 6.1: Esquema con las variables utilizadas en la modelación del material compuesto.*

### 6.1 Relación entre la fuerza de puente y apertura de fisura

Aplicando desplazamientos prescritos, la fisura comienza a abrirse y se computa la fuerza de puente en el baricentro de cada fibra. El proceso finaliza cuando la energía elástica del modelo presenta una caída en su valor, como lo muestra la figura 6.2:



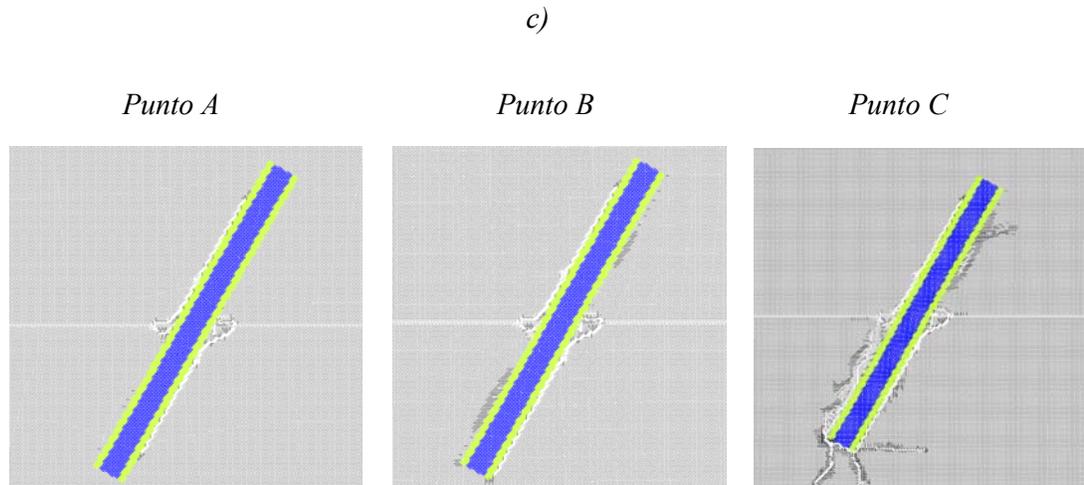


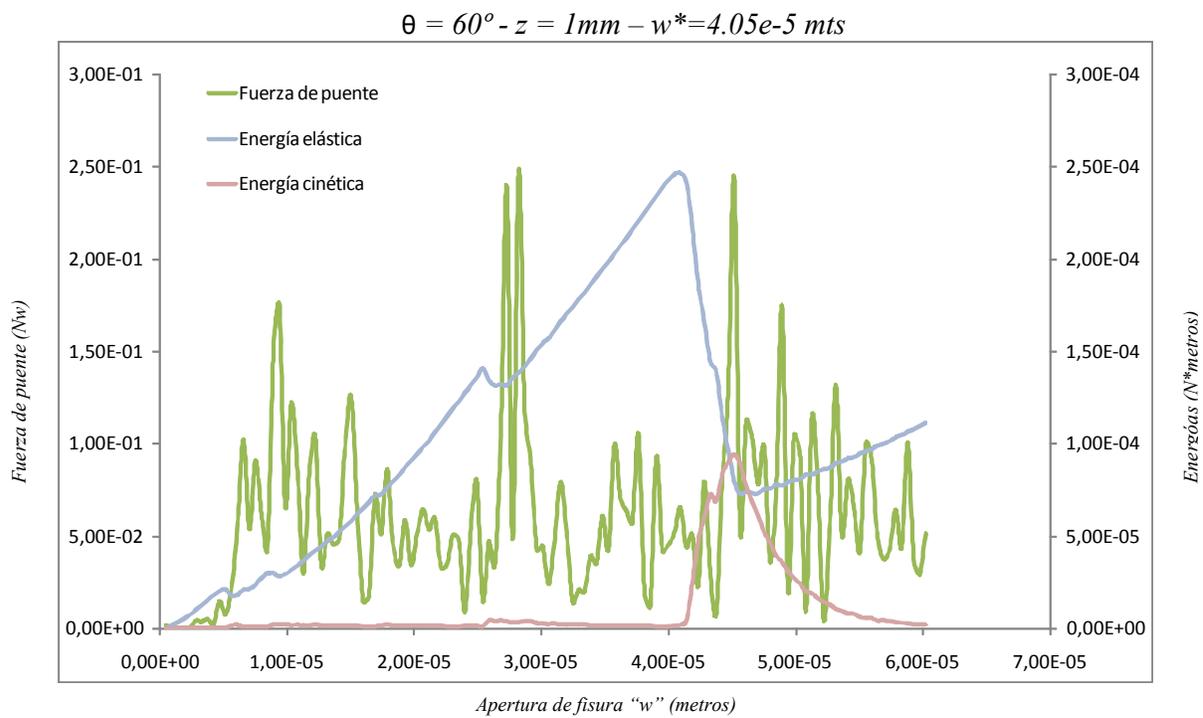
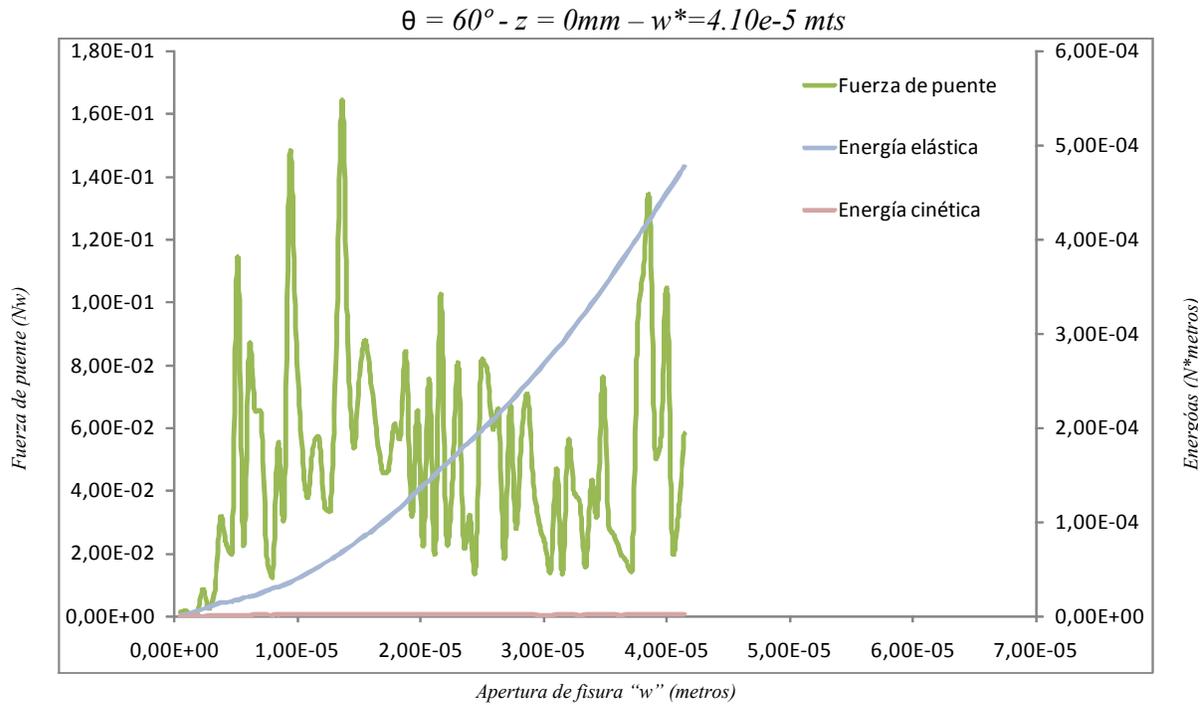
Figura 6.2: a) Esquema del modelo analizado y modelación en el DEM.  $\theta = 60^\circ - z = 0\text{mm}$ . b) Relación entre fuerza de puente y apertura de fisura  $w$ . También se grafican las energías de daño en las distintas fases del compuesto, así como también la energía cinética y elástica del modelo analizado. c) Proceso de rotura del modelo analizado.

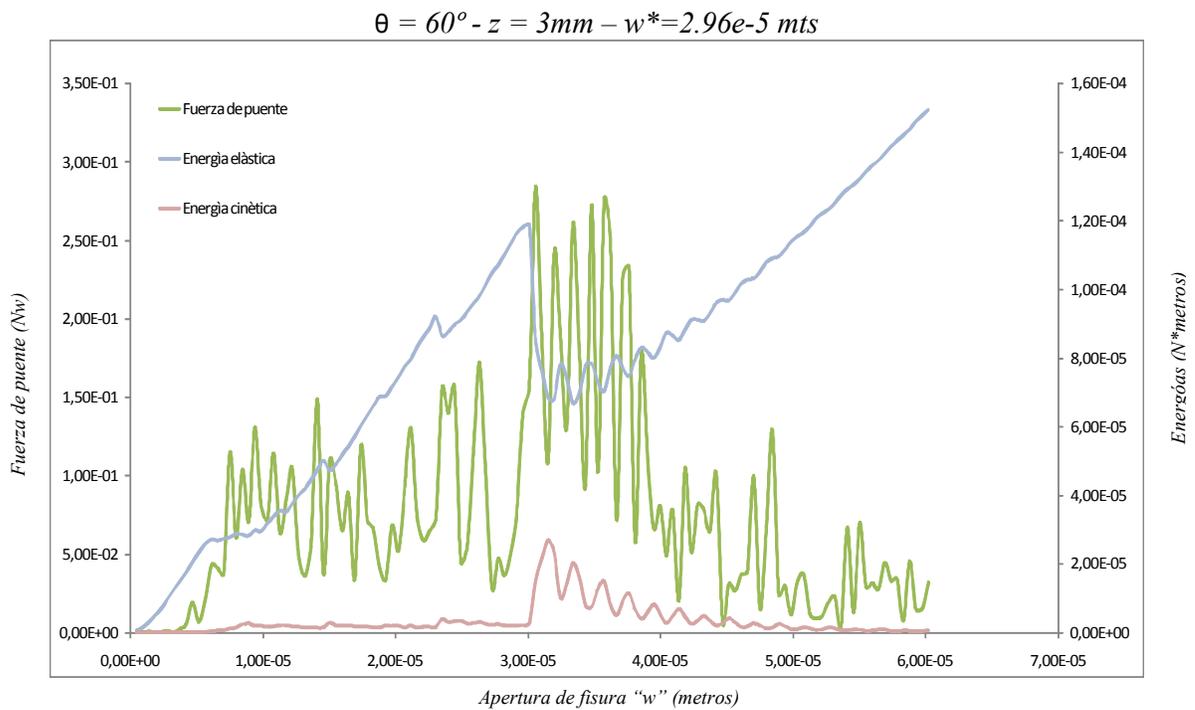
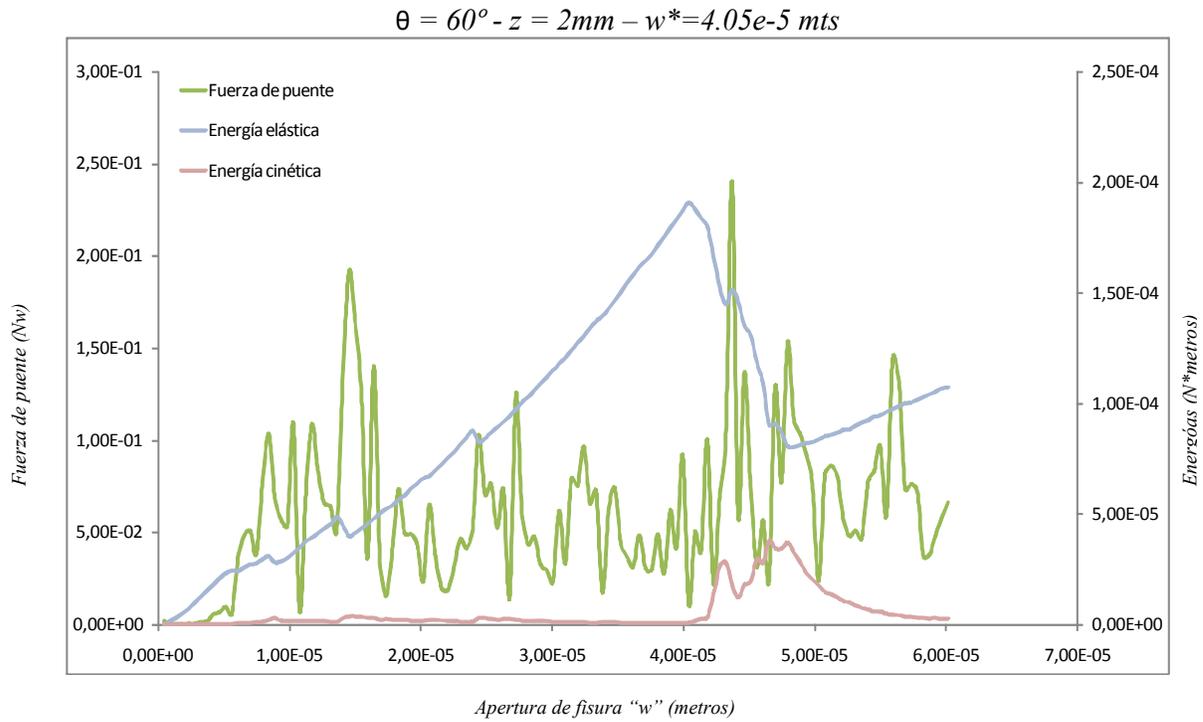
Se puede observar que a medida que la fisura comienza a abrirse, la fibra resiste dicha apertura y la fuerza de puente comienza a aumentar, hasta que llegamos al punto B, instante en el cual el modelo rompe, por lo tanto la energía elástica cae y la energía cinética comienza a tomar valores distintos de cero. La apertura registrada en el punto B es la apertura de fisura crítica para el modelo analizado.

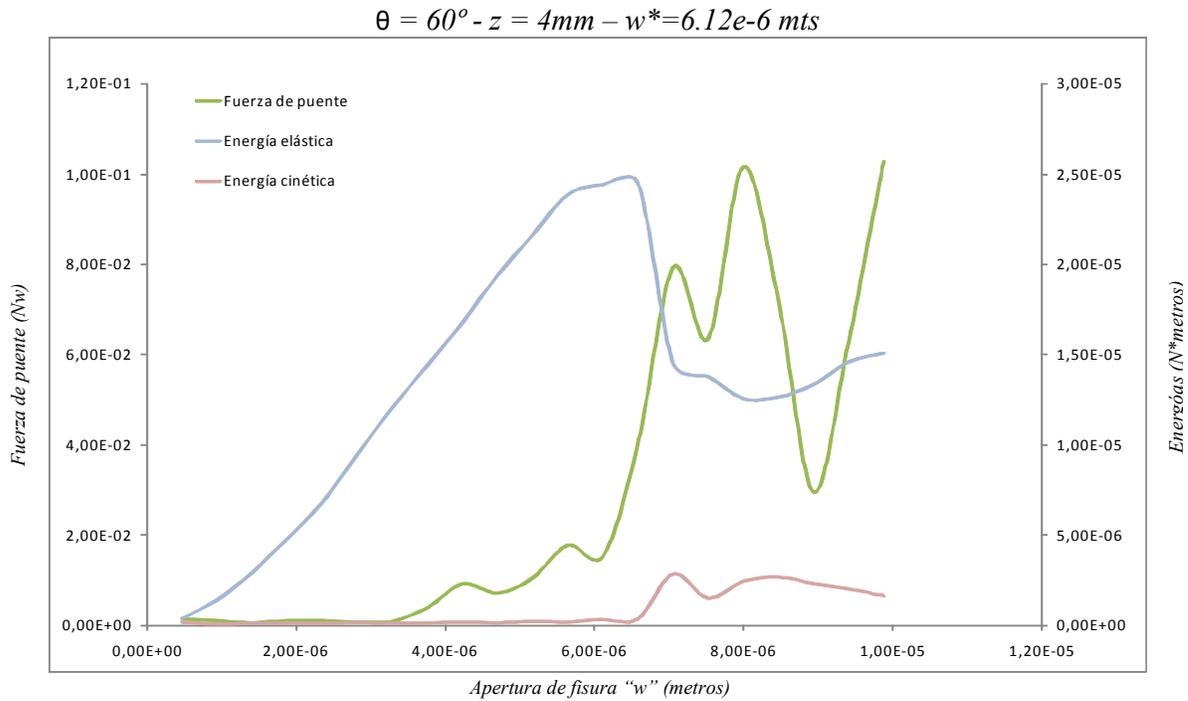
Haciendo el mismo procedimiento para los 90 casos corridos, la apertura de fisura máxima registrada será nuestro valor  $w^*$ , apertura de fisura para la cual todas las fuerzas de puente son nulas, que para nuestro caso  $w^*=4.89\text{e-}5$  mts.

Analizando los resultados obtenidos en el estudio de las fuerzas de puente en relación con la apertura de la fisura “ $w$ ” de cada fibra en forma aislada, se pueden mencionar algunas observaciones:

- A mayor distancia “ $z$ ”, se necesita menor apertura de fisura para llegar a la rotura del modelo.
- Las fibras experimentan una mayor fuerza de puente con el aumento de la distancia “ $z$ ” al plano de fisura, debido a una mayor longitud enterrada de la fibra.

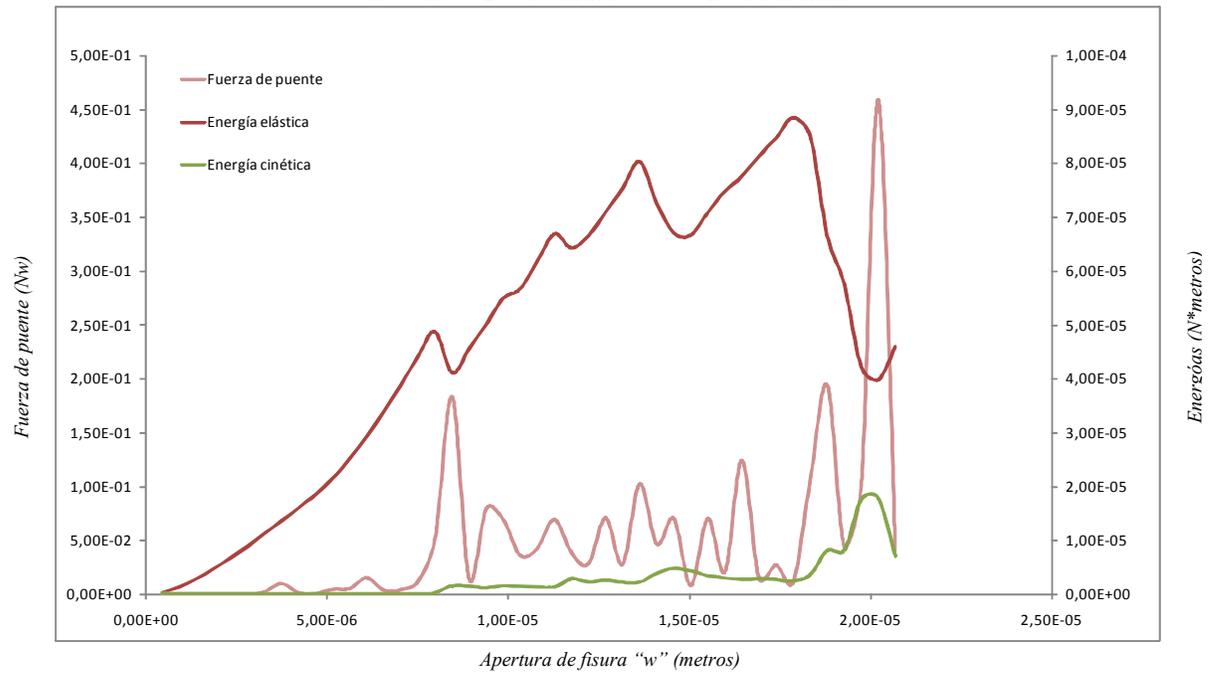




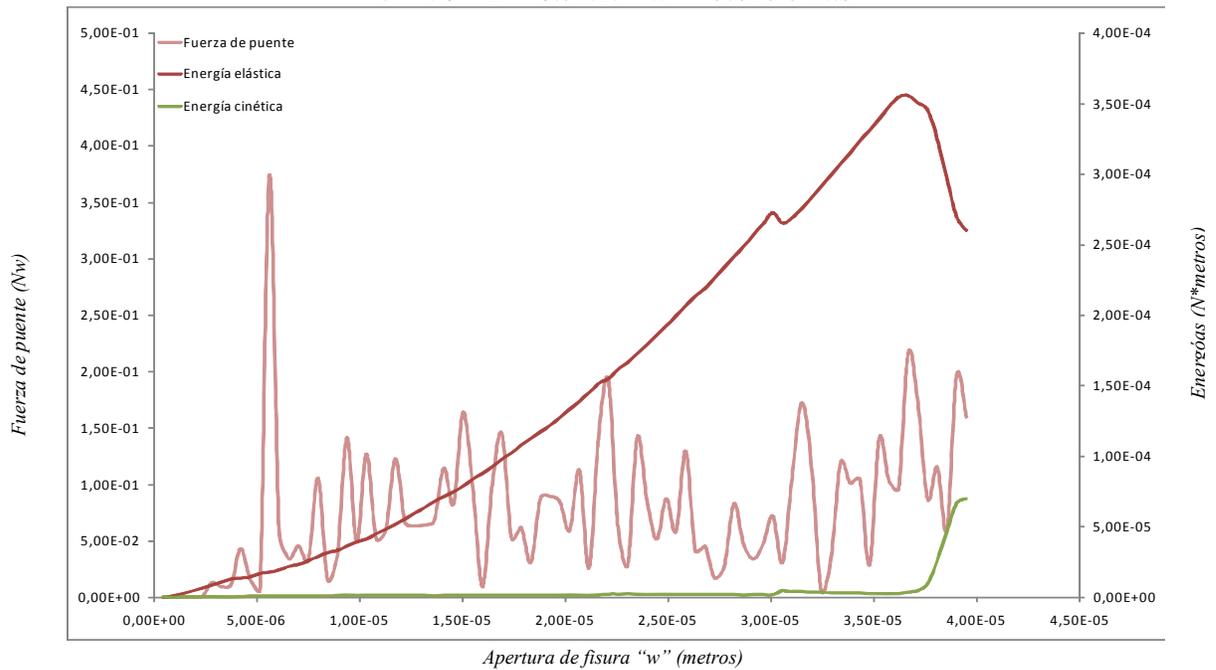


- Para un mismo valor de  $z$ , se ha podido observar que cuanto mayor sea la inclinación  $\theta$  de la fibra mayor será la fuerza de puente que toma la fibra debido al fenómeno *snubbing*, ya que en el punto de salida de la fibra, la matriz se comporta como una polea con fricción generando una mayor fuerza de puente por la aparición de tensiones tangenciales.

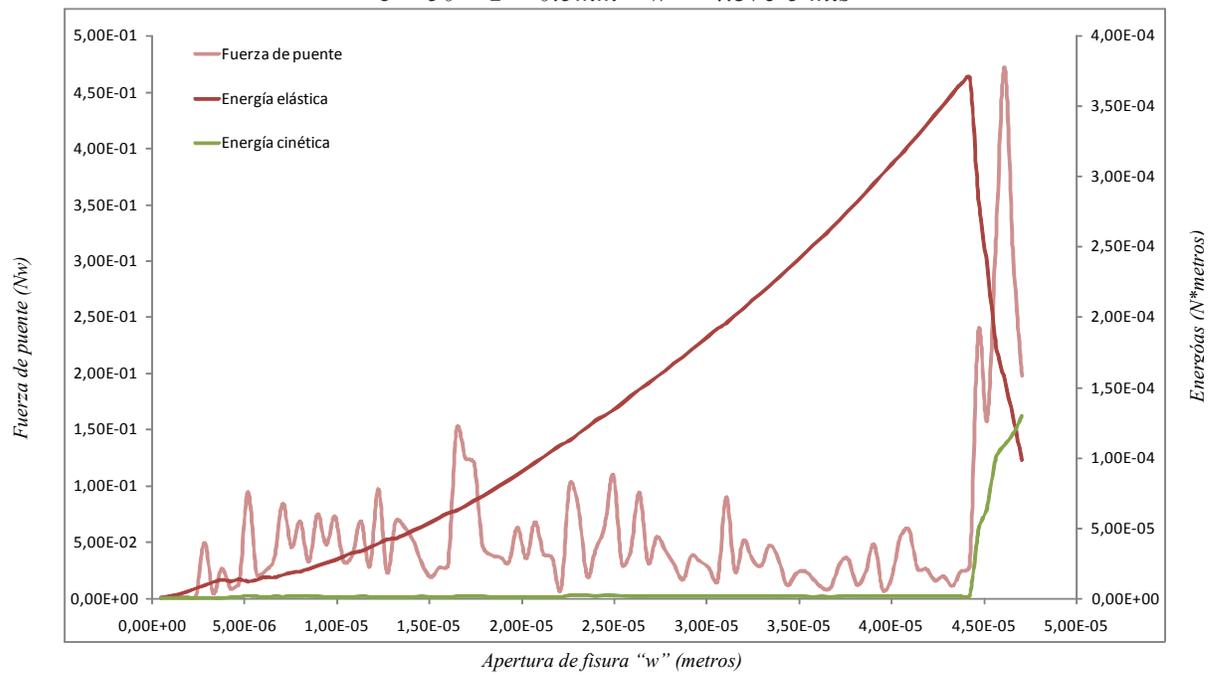
$$\theta = 90^\circ - z = 0.5\text{mm} - w^* = 1.79e-5 \text{ mts}$$



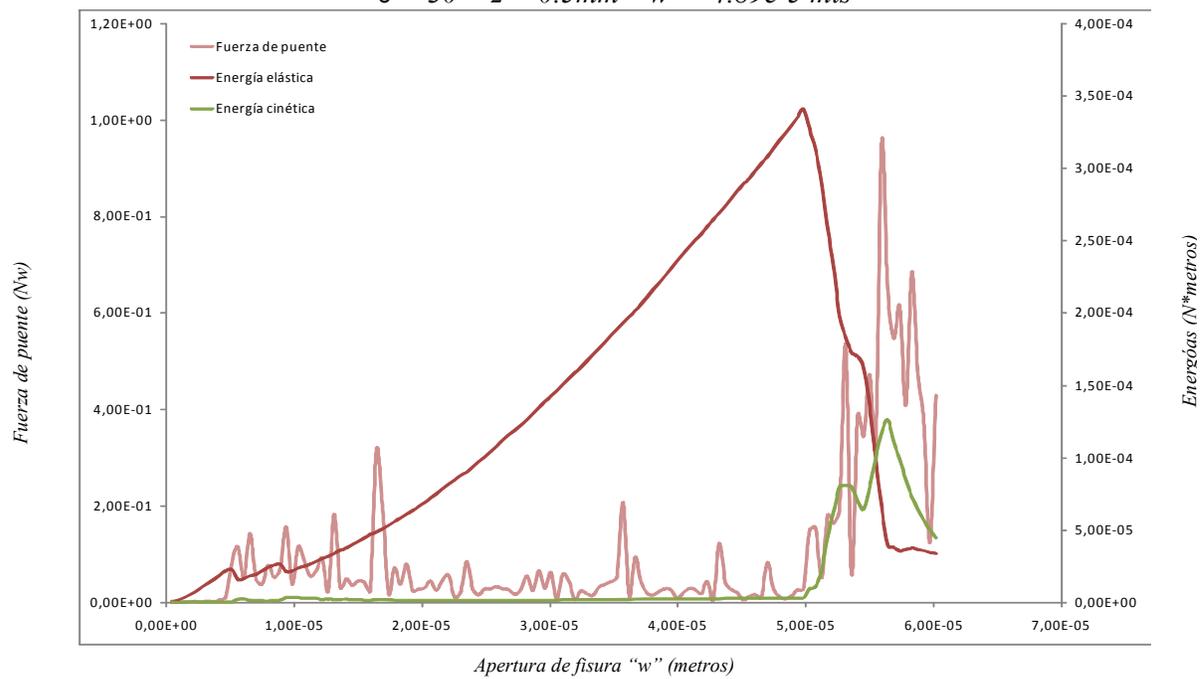
$$\theta = 70^\circ - z = 0.5\text{mm} - w^* = 3.62e-5 \text{ mts}$$



$$\theta = 50^\circ - z = 0.5\text{mm} - w^* = 4.37e-5 \text{ mts}$$



$$\theta = 30^\circ - z = 0.5\text{mm} - w^* = 4.89e-5 \text{ mts}$$



- Cabe aclarar que para una fibra que tenga orientación paralela al plano de la fisura, la fuerza de puente resistida será nula y no participa en el aumento en la tenacidad del material compuesto.

## 6.2 Tensión en el compuesto y tenacidad a la fractura.

Para hallar la curva  $\sigma_c - w$  para el compuesto, se computan las tracciones transmitidas a través de la fisura de la matriz integrando las fuerzas que contribuyen aquellas fibras que están activas en la acción de puenteo. Así, para cada apertura de fisura  $w$ , la tensión  $\sigma_c$  del compuesto se obtiene según la fórmula 3.9.

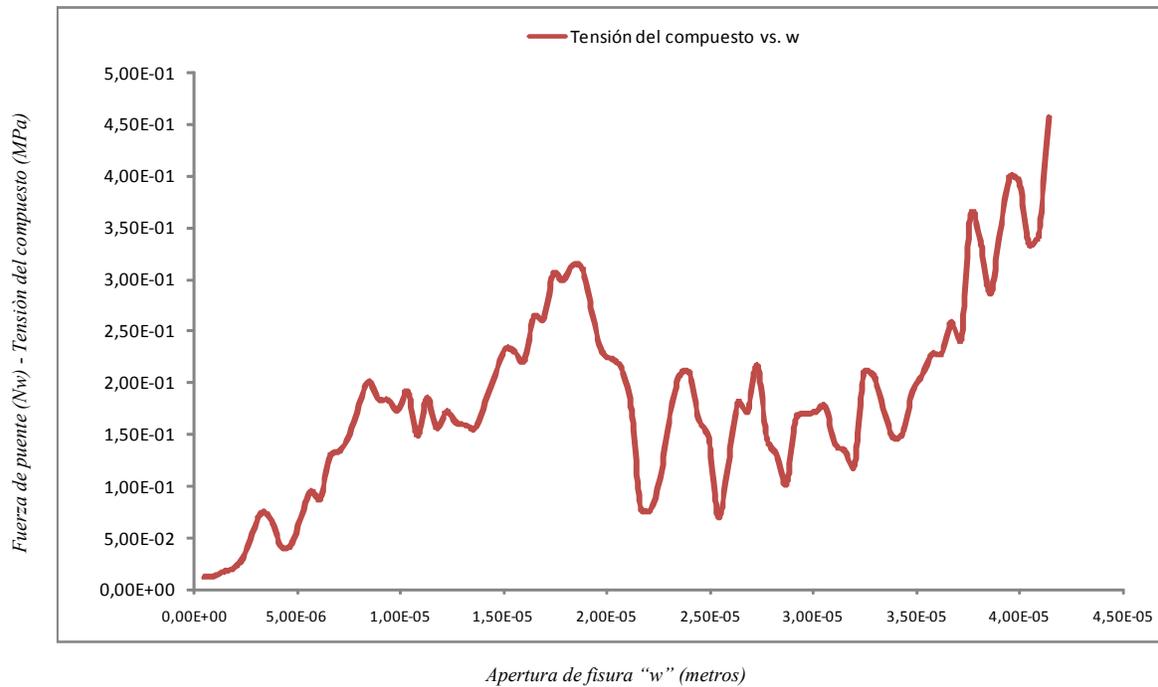


Figura 6.3: Tensión en el compuesto en función de la apertura de fisura.

Integrando el área bajo la curva  $\sigma_c - w$ , el valor de la tenacidad a la fractura del metrial compuesto reforzado por el conjunto de fibras analizadas es de:

$$G_c = 74,2 \text{ KN/m} = 7420 \text{ N/m}$$

Como el  $G_f$  del mortero tiene un valor de alrededor de 100 N/m, se ha podido aumentar la tenacidad de la matriz en el orden de 700 veces mediante la incorporación de fibras de Spectra 900.

### 6.3 Análisis de los procesos de ruptura en materiales compuestos

A continuación se detallan los procesos de ruptura para uno de los casos analizados en este trabajo.

Tomando una fibra con un ángulo de inclinación  $\theta = 60^\circ$  y  $z=0\text{mm}$  (es decir que el bari-centro de la fibra coincide con el plano de la fisura), se han podido observar los siguientes procesos de ruptura:

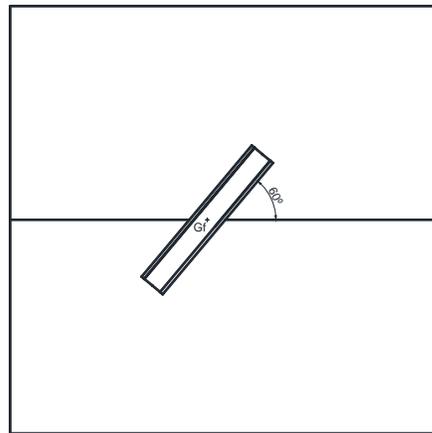


Figura 6.4: Esquema del modelo analizado;  $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$ .

En los primeros instantes de carga, la fibra antes de despegarse de la matriz ejerce una presión intensa sobre la matriz que hace que las tensiones generadas por esta presión alcancen un máximo, valor mayor que la resistencia de la matriz, produciéndose *spalling* (ruptura de la matriz cercana al punto de salida de la fibra). Este efecto se puede observar en la figura 6.5:

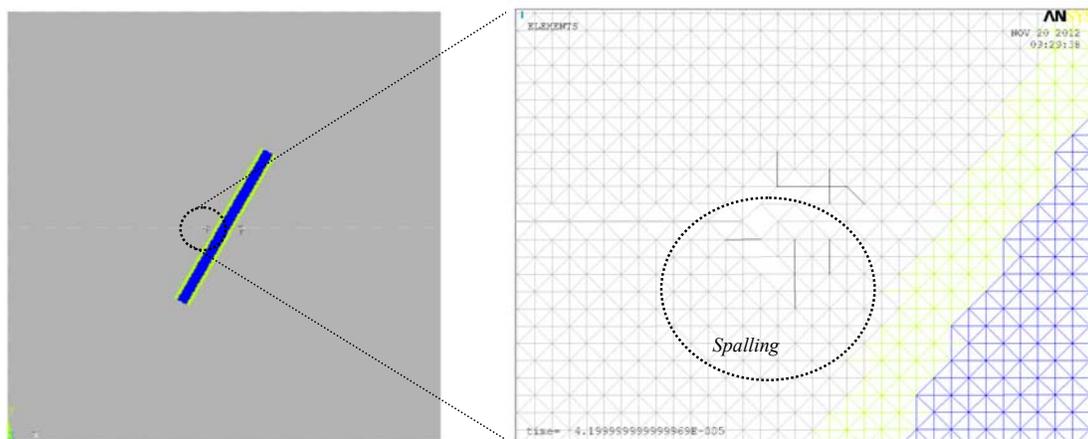


figura 6.5: Efecto *Spalling* para uno de los casos analizados.  
 $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$

Se sigue cargando y se produce el despegue (debonding) de las caras traccionadas de la matriz, debido a que la fibra tiene mayor módulo de elasticidad que el material matriz. Esto se puede observar en la figura 6.6:

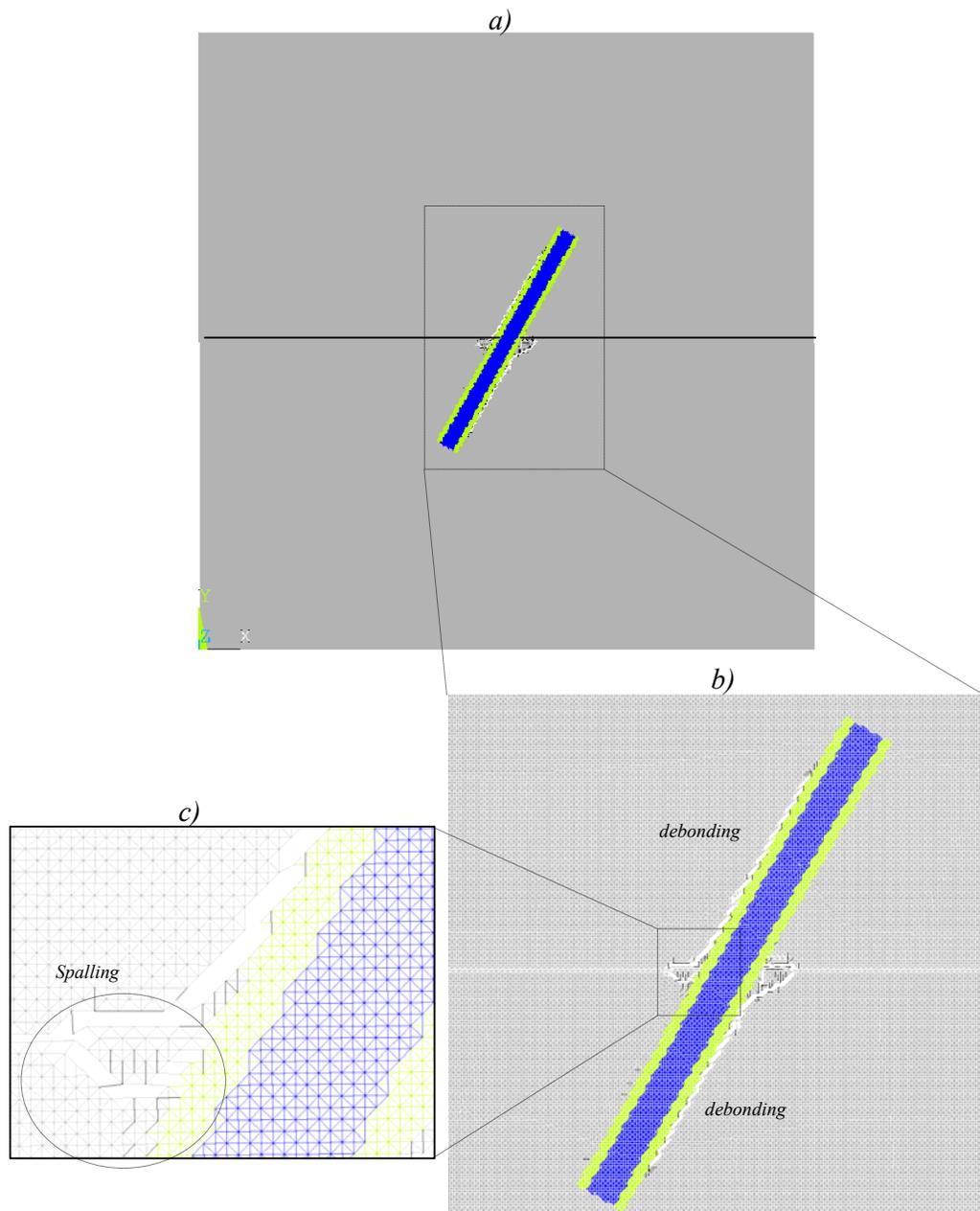


figura 6.6: a) Efecto debonding para uno de los casos analizados.  
 $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$ . b) Zoom en las cercanías de la fibra.  
 c) Spalling.

Después de que se produce el despegue (*debonding*), la fibra comienza a ser extraída fuera de la matriz, de manera que la superficie despegada de la fibra puede deslizarse con res-

pecto a la matriz, comenzando un proceso de fricción entre ambas fases. Se produce entonces un pliegue de la fibra y en ese punto se produce el efecto *snubbing*, efecto mediante el cual la matriz se comporta como una polea con fricción, generando tensiones tangenciales entre fibra-matriz. Esto último se grafica en la figura 6.7.

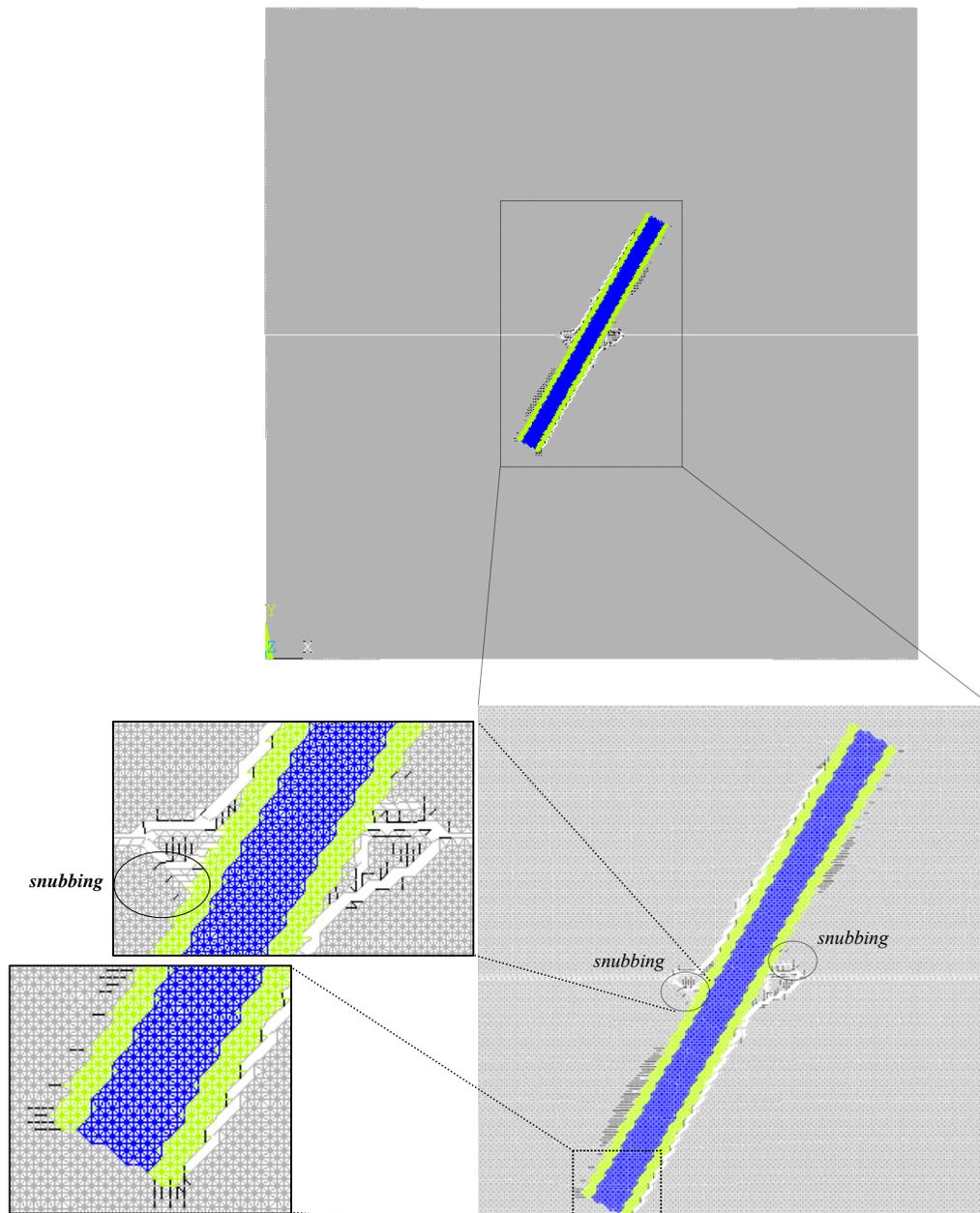


Figura 6.7: Fin del proceso de despegue (*debonding*), inicio de *snubbing*.  
 $\theta = 60^\circ - z=0\text{mm}$

A continuación, en la figura 6.8, se presenta un gráfico de fuerza de puente vs apertura de fisura “w”, en el que se señalan puntos característicos que ayudan a entender mejor la ocurrencia de dichos procesos de ruptura.

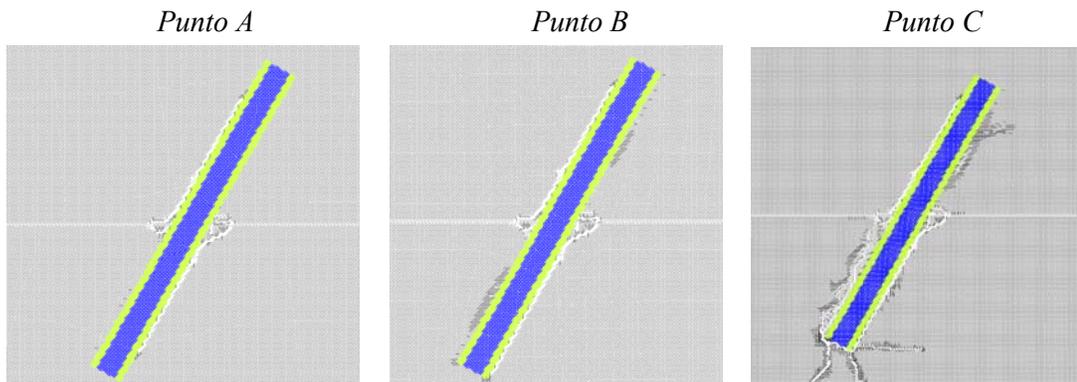
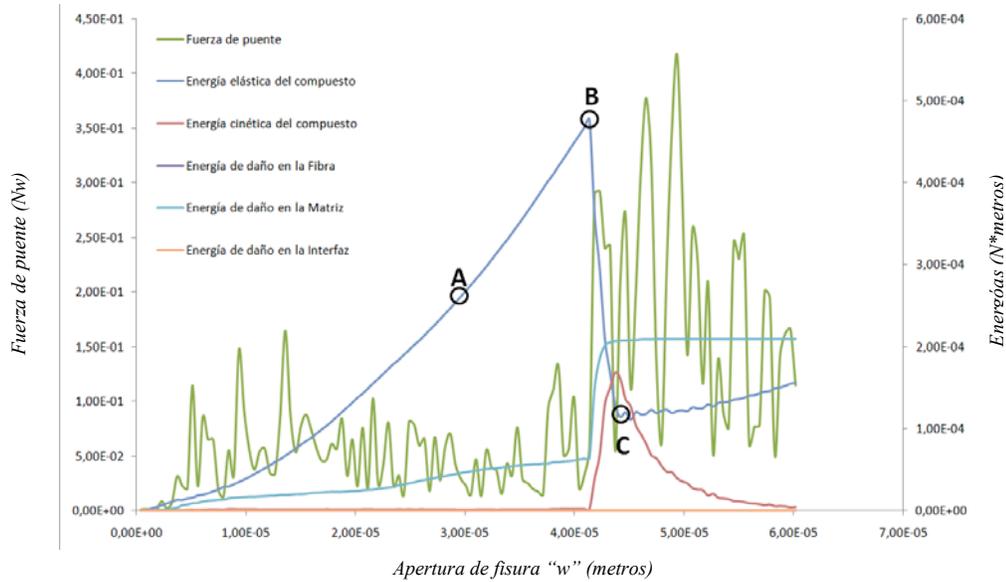


Figura 6.8: curva Fza puente vs w Para uno de los casos analizados.  
 $\theta = 60^\circ - z=0mm$

Se observa en la figura anterior que a medida que la curva que representa la energía elástica del compuesto crece se produce primero el efecto de spalling y luego el debonding (despegue de la matriz), hasta llegar al punto B en el cual finaliza en proceso de despegue y ocurre el snubbing, que se representa por una flexión de la fibra, generando fricción entre la matriz y la fibra, aumentando así la fuerza de puente que resiste dicha fibra. Luego la curva cae repentinamente y se alcanza el punto C en el cual el modelo ya rompió.

Observaciones pertinentes:

- *Se puede observar en la curva de daño de la matriz (curva celeste) cómo dicha curva va subiendo durante el proceso de DEBONDING, es decir, la matriz se va despegando y esto se representa como daño en la matriz, hasta que llega al punto B en el cual la curva pega un salto pq terminó el proceso de despegue y ocurre una rotura de la matriz y ya no se daña más pq el modelo se rompió.  
Se puede observar en en la curva Fuerza de puente vs w, que en instantes antes de llegar al punto B (punto hasta donde el modelo es válido) la fuerza de puente presenta picos más elevados. Esto se debe a que ocurre el efecto snubbing que aumenta dicha fuerza de puente.*
- *ENCN: durante el proceso elástico la energía cinética del compuesto es cero, hasta que termina el debonding y la fisura propaga, por lo tanto la curva pega un salto y la energía cinética comienza a tomar valor. En ese momento, nosotros determinamos el fin de nuestro modelo.*
- *ENGDI: durante todo el proceso de carga, la energía de daño en la interfaz es nula, es decir que la interfaz no se daña en ningún momento.*
- *ENDF: la fibra tampoco se daña durante el proceso de carga. Así lo refleja la curva de energía de daño en la fibra, y esto es correcto ya que la misión de cada fibra es impedir que ambas partes de la matriz se separen entre sí.*

## CAPITULO 7 - CONCLUSIONES

*En este trabajo, fueron propuestos modelos mecánicos y matemáticos para calcular el aumento de la tenacidad de la matriz frágil contribuido por la adición de fibras. Se analizaron también los procesos de rotura que se producen en los materiales compuestos. A través de la implementación de programación numérica, se analizó la contribución que aporta cada fibra interviniente en la acción de puenteo en el aumento en la tenacidad del material compuesto. Por los resultados obtenidos y las observaciones realizadas podemos concluir puntos importantes:*

- *Cuanto mayor es la distancia desde el baricentro de la fibra al plano de la fisura, es necesaria una menor apertura de la fisura para poder alcanzar la máxima fuerza de puenteo de la fibra.*
- *La fuerza de puente alcanzada por una fibra se reduce en cuanto la distancia desde el baricentro de la fibra al plano de la fisura aumenta*
- *Para un mismo valor de  $z$ , se ha podido observar que cuanto mayor sea la inclinación  $\theta$  de la fibra mayor será la fuerza de puente que toma la fibra al fenómeno snubbing.*
- *Para una fibra con orientación paralela al plano de la fisura, la fuerza de puente resistida será nula y no participa en el aumento en la tenacidad del material compuesto.*

- *Para fibras con orientación no perpendicular al plano de la fisura, se produce snubbing durante el proceso de ruptura. No ocurre esto en el caso de fibras que tienen orientación perpendicular al plano de la fisura.*
- *Para todos los casos analizados en este trabajo se produce debonding o despegue de la matriz.*
- *Se verifica el aumento en la tenacidad del material compuesto al reforzarlo con este tipo de fibras.*

## CAPITULO 8 - REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. *París, F, Marzo 2001. "A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials", NASA Report CR/2001-210661.*
2. *BRANDT, A. M., 1985. On the optimal direction of short metal fibers in brittle matrix composites. J. of Materials Science; 20:3831-3841.*
3. *Daniel I.M. y Ishai O., 1994, "Engineering Mechanics of Composite Materials", Oxford University Press, Oxford.*
4. *Berdin C., Dong M.J. and Prioul C., 2001, "Local Approach of Damage and Fracture Toughness for Nodular Cast Iron", Engineering Fracture Mechanics, 68, 1107-1117*
5. *Ortiz J., Cisilino A.P. y Otegui J.L., 2001, "Boundary Element Analysis of Fatigue Crack Propagation Micromechanisms in Ductile Iron" , Engineering Analysis with Boundary Elements, 25, 467-473*
6. *Ortiz J., Cisilino A.P. y Otegui J.L., 2001, "Effect of Microcracking on the Micromechanics of Fatigue Crack Growth in Austempered Ductile Iron", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 24/9, 591-606*
7. *CHODOUNSKY, Marcel A. 2008. Revista Pisos Industriais. Ed. VI. Trima Engenharia e Consultoria.*
8. *MACCAFERRI. 2002-2007; Empresa do Grupo Industrial Maccaferri. Maccaferri América Latina.*
11. *Brebbia C.A., Telles J.C.F. y Wrobel L.C., 1983, "Boundary Element Techniques", Springer Verlag, Berlin.*

16. A.P.Cisilino y M.H.Aliabadi, 1999. *Three-dimensional Boundary Element Analysis of Fatigue Crack Growth in Linear and Non-linear Fracture Mechanics*, , *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, pp. 713-733.
17. A.P.Cisilino, M.H.Aliabadi y J.L.Otegui, 1998. *A Three-Dimensional Dual Boundary Element Formulation for the Elastoplastic Analysis of Cracked Bodies*, *International J. of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp.237-256.
18. A.P.Cisilino y M.H.Aliabadi, 1998. *A Boundary Element Method for Three-Dimensional Elastoplastic Problems*, *Engineering Computations*, Vol. 15, No. 8, pp. 1011-1030.
19. IRWIN, G. R. Berlin, 1958. *Fracture in handbuch der physic springer-verlag*. v.6. p.551.
20. A.P.Cisilino y M.H.Aliabadi, 1999, *Elastoplastic BEM Implementation of the Energy Domain Integral for the Analysis of 3D Fracture Problems*, *International Journal of Fracture*, Vol. 96, pp. 229-245.
21. Iturrioz I. Y Riera J.D., 1998. *Discrete elements model for evaluating impact and impulsive response of reinforced concrete plates and shells*. *International Journal Of Nuclear Engeneering And Design*.
22. Iturrioz I., Spinelli L. y Schnaid F., 2000. *Aplicación del método de los Elementos discretos en el análisis de Estructuras formadas por Materiales Frágiles*.: IV Coloquio Latinoamericano de Fractura y Fatiga, 2000, Neuquen. Jornadas Sam 2000.
23. KATZ, A. LI V.C, KAZMER, A., 1995. *Bond properties of carbon fibers in cementitious matrix*. *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*, 1995; 2:125-128.
24. KATZ, Amnon; LI, Victor C., 1995. *Inclination angle effect of carbon fibers in cementations composites*. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1995;12:1340-1348.
25. *Energy Domain Integral Applied to Solve Centre and Double-Edge Crack Problems in Three Dimensions* , A.P.Cisilino, M.H.Aliabadi y J.L.Otegui, 1998. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 29, pp. 181-194.
26. LEUNG, Christopher K. Y.; LI, Victor C., 1992. *Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites*. *J. Mech. Phys. Solids*, 1992; 40[6]: 1333-1362.

27. Bittencourt, E., Needleman, A., Gurtin, M., Van der Giessen, E. "A comparison of nonlocal continuum and discrete dislocation plasticity predictions" *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. No prelo.
28. LI, H. 1980. *Mecânica da fratura*. Sandong: Ciência e Tecnologia, (em chinês).
29. Fedrigo F., 2001. *Aplicação de Interfaces coesivas na mecânica da Fratura Via Método dos Elementos Finitos*, Porto Alegre, Dissertação (Mestrado), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Rio Grande Do Sul.
30. LI, N. Z.; KANDA, T.; LI, V. C. On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementations composites. *Concrete Science and Engineering*, 1999; 1:173-174.
31. LI, Victor C.; LEUNG, C. K.Y., 1988. "Ceramics for construction", *J. Construction and Building Materials*, V.2, No.2, pp. 59-68.
32. *Modelado Mediante Funciones de Peso del Cierre Parcial de Fisuras Debido a Tensiones Residuales por Granallado*, H.L.Montenegro, A.P.Cisilino y J.L.Otegui, *Jornadas SAM-CONAMET 2001*, Posadas, Septiembre 2001.
33. LI Victor. C.; WANG, Youjiang.; BACKER, 1991, Stanley. A micromechanical model of tension softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *J. Mech Phys. Solids*, 1991; 39[5]:607- 625.
41. R. Barrios D'Ambra, L. Kostascki, J.M. Podestá, B. Uberti, I. Iturrioz, (2009). "Estudio del comportamiento de placas delgadas sometidas a cargas de impacto utilizando el Método de los Elementos Discretos (MED)". *Mecánica Computacional Vol XXVIII*, págs. 973-984.
43. PAGANI, C.; MIRANDA, C. B.; BOTTINO, M. C. 1995. *Avaliação da tenacidade à fratura de diferentes sistemas cerâmicos*.
44. R. Barrios D'ambra, L. Kostascki, I. Iturrioz, A. Cisilino, P. Frontini, L. Fasce, V. Pettarín. 2010. "Application of the Truss-Like Discrete Element Method to Model the Impact Test of Circular Thin Polymer Plates" *IV European conference on Computational Mechanics Palais des Congres, Paris, France. May 16-21*.
46. Claudia A. Morel, Héctor D. Cóceres, Ricardo J. Barrios D'Ambra. 2010.

- “APLICACIÓN DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DISCRETOS AL PROCESO DE SEPARACIÓN FIBRA-MATRIZ CON UN MODELO DE INTERFACES COHESIVAS” *Mecánica Computacional Vol XXIX*, págs. 5369-5380 (artículo completo). Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.). Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010.
47. Ricardo Barrios D'ambra , Juan Manuel Podestá , Bruno Uberti, Ignacio Iturrioz, Wang Chong. 2010. “The matrix fiber interaction: Numerical simulation using Truss like Discrete Element method”. *Mecánica Computacional Vol XXIX*, págs. 5145-5162 (artículo completo). Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.). Buenos Aires, Argentina, 15-18 Noviembre 2010.
49. STAINER, Daniel.; ALVES. Hugo L. R.; BERGMANN. Carlos P. Avaliação da viabilidade de fabricação de componente em cerâmica avançada aplicado como cabeça femoral em próteses de quadril. Laboratório de Materiais Cerâmicos – LACER, Departamento de Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).
55. WILLIAM, D.; CALLISTER, JR. ,2002. *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução. 5a ed. LTC. Rio de Janeiro.*
61. ZHANG, Jun.; LI, Victor C. Effect of inclination angle on fiber rupture load in fiber reinforced cementations composites. *Composites Science and Technology*, 2002; 62:775-781.
62. NEIVA, Filippini Piaciski. Modelagem matemática do efeito de spalling à tenacificação de materiais compostos reforçados por fibras. UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL – UNIJUÍ. DeFEM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA. DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA.