

CONTENIDO

	Página
RESUMEN	3
PROLOGO.....	4
AGRADECIMIENTOS	6
LISTA DE SIMBOLOS.....	7
CAPITULO 1. MECANICA NO LINEAL DE LOS SOLIDOS.	
1.1 INTRODUCCION.....	11
1.2 EL ANALISIS NO LINEAL.....	12
1.3 DESCRIPCION DE LA DEFORMACION.....	15
1.4 MEDIDAS DE DEFORMACIONES.....	17
1.5 ESPACIOS DE DEFORMACIONES Y VARIACIONES ADMISIBLES.....	21
1.6 MEDIDAS DE TENSIONES.....	22
1.7 MOVIMIENTOS SUPERPUESTOS DE CUERPO RIGIDO. OBJETIVIDAD.....	24
1.8 ECUACIONES CONSTITUTIVAS OBJETIVAS.....	27
1.9 ELASTICIDAD NO LINEAL	29
1.10 FORMA DEBIL DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO EXPRESADA EN TASAS.....	32
1.11 IMPLEMENTACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	34
1.12 ELASTOPLASTICIDAD.....	40
1.13 MODELO HIPOELASTOPLASTICO.....	41
1.14 INFLUENCIA DE LA ASIMETRIA EN EL TENSOR CONSTITUTIVO \mathbf{C}^T	44
1.15 MODELO HIPERELASTOPLASTICO.....	46
1.16 TEORIA DE PLASTICIDAD EN TERMINOS DE TENSIONES CORROTADAS.....	52

CAPITULO 2. MECANICA NO LINEAL DE MEDIOS POROSOS SATURADOS.

2.1	INTRODUCCION.....	57
2.2	LA CONSOLIDACION DE SUELOS SATURADOS.....	58
2.3	LAS TENSIONES EN LA MASA DE SUELO.....	59
2.4	ECUACION DE EQUILIBRIO EN TASAS DE MEDIOS POROSOS SATURADOS.....	61
2.5	ECUACION DE CONTINUIDAD DEL FLUIDO.....	63
2.6	SISTEMA SOLIDO - AGUA ACOPLADO.....	65
2.7	APLICACION DEL M.E.F. AL SISTEMA ACOPLADO.....	65
2.8	CRITERIO DE PLASTIFICACION PARA SUELOS COMPRESIBLES.....	68

CAPITULO 3. APLICACION COMPUTACIONAL.

3.1	INTRODUCCION.....	74
3.2	PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA SOLIDOS CONTINUOS.....	75
3.3	PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA MATERIALES POROSOS SATURADOS..	79
3.4	ALGORITMO DE RETORNO PLANO CORTANTE.....	81
3.5	EJEMPLO 1: VOLADIZO CON CARGA DISTRIBUIDA.....	82
3.6	EJEMPLO 2: VIGA BIEMPOTRADA HIPERELASTOPLASTICA.....	83
3.7	EJEMPLO 3: CONSOLIDACION ELASTICA UNIDIMENSIONAL.....	85
3.8	EJEMPLO 4: CONSOLIDACION ELASTOPLASTICA BIDIMENSIONAL.....	87
3.9	EJEMPLO 5: CONSOLIDACION DE UN SUELO REGIONAL.....	95

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

4.1	INTRODUCCION.....	100
4.2	MODELADO DE LA NO LINEALIDAD GEOMETRICA.....	101
4.3	RESOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA NO LINEAL.....	102
4.4	EJEMPLOS PRACTICOS RESUELTOS.....	102
4.5	RECOMENDACIONES PARA DESARROLLOS POSTERIORES.....	103

REFERENCIAS.....	105
------------------	-----

RESUMEN

En esta Tesis se desarrolla un modelo matemático, y el correspondiente programa computacional de elementos finitos, para la descripción del comportamiento no lineal, tanto físico como geométrico, de las arcillas blandas compresibles de la región Nordeste Argentino. Inicialmente se formula un modelo no lineal genérico, para cualquier sólido continuo elastoplástico, con una descripción del material basada en magnitudes corrotadas. Posteriormente, para poder representar el comportamiento de las arcillas saturadas, se extiende el modelo a materiales porosos saturados.

Los suelos saturados compresibles abundan en muchos lugares del mundo, siendo esta zona del país uno de esos. En estas regiones se producen pérdidas económicas importantes, tanto por fallas estructurales como por problemas operacionales en las edificaciones, cuando las fundaciones son mal diseñadas por no conocerse con suficiente precisión el comportamiento bajo cargas de la masa de suelo que forma la cimentación. Por lo tanto, la elección del tema de esta Tesis responde a la necesidad de contar con una herramienta computacional que, a la hora de realizar el diseño y proyecto de pesadas estructuras sobre dichos suelos saturados compresibles, pueda tener una certera estimación de los asentamientos que se experimentarán, evitándose así los serios daños que generan en las construcciones los excesivos o irregulares asentamientos no previstos.

PROLOGO

El presente trabajo de Tesis ha sido desarrollado por el Ing. Juan Emilio Manzollilo, bajo la dirección del Mag. Ing. Héctor Ariel Di Rado y la co-dirección del Dr. Ing. Armando Miguel Awruch, para alcanzar el grado de Magíster de la carrera de Maestría en Ciencias de la Ingeniería, llevada a cabo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina. El tesista y el director son profesores del Departamento de Mecánica Aplicada de las mencionadas Facultad y Universidad, en tanto que el co-director es profesor del Departamento de Mecánica Aplicada de la Escola de Engenharia de la Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.

El objetivo de esta Tesis es desarrollar un modelo matemático, basado en magnitudes corrotadas, y el programa computacional de elementos finitos para la simulación numérica del comportamiento no lineal físico y geométrico de materiales elastoplásticos genéricos, con adicional aplicación específica a suelos saturados compresibles.

La formulación a ser presentada está basada en el Análisis No Lineal de Elementos Finitos aplicado a la Mecánica de los Suelos. Si bien, a lo largo de este trabajo se irán introduciendo y definiendo los conceptos utilizados, es necesario contar con una base teórica de los temas mencionados para la completa comprensión de lo realizado. En la sección Referencias se encuentra la bibliografía que puede ser consultada.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos utilizados de la Mecánica No Lineal de los Medios Continuos. Inicialmente se hace una introducción al análisis no lineal, para luego exponer la manera en que se describen las deformaciones y se calculan las tensiones en este tipo de análisis. Se introduce también el principio de objetividad que deben cumplir las magnitudes y relaciones constitutivas cuando existen grandes deformaciones. En secciones siguientes se desarrolla la ecuación de equilibrio del medio continuo que posteriormente es discretizada

aplicando el Método de los Elementos Finitos. Finalmente se presenta un modelo hipoelasto-plástico y otro hiperelastoplástico, expresados ambos en términos de magnitudes corrotadas.

En el Capítulo 2 se lleva a cabo la aplicación específica al material suelo saturado compresible de los modelos no lineales. En las primeras secciones se definen brevemente los conceptos utilizados de la Mecánica No Lineal de los Medios Porosos Saturados. Se trabaja primero con la ecuación de equilibrio de la fase sólida y luego con la ecuación de continuidad del fluido para llegar a un sistema acoplado sólido – agua que posteriormente es discretizado por el Método de los Elementos Finitos. Por último se desarrolla el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado para arcillas compresibles de esta región, Nordeste Argentino, en términos de tensiones corrotadas, de acuerdo a lo realizado al final del Capítulo 1.

El Capítulo 3 se encarga de la aplicación al cálculo computacional de los modelos no lineales desarrollados en los capítulos anteriores. En principio se detallan los procedimientos de cálculo, tanto para sólidos continuos como para suelos saturados compresibles, que son realizados por el computador. Posteriormente se muestran los resultados numéricos de los modelos desarrollados en este trabajo para distintos ejemplos tomados de reconocidas publicaciones, sirviendo la comparación de estos resultados como validación de los modelos matemáticos de esta Tesis. También se incluye un ejemplo resuelto con datos típicos de suelos saturados blandos de la región Nordeste Argentino.

En la parte final se presenta el Capítulo 4 con las Conclusiones derivadas de la ejecución de este trabajo, y con una serie de propuestas para desarrollos posteriores. Por último, en las Referencias, se tiene toda la bibliografía consultada y a la que se pueden remitir los lectores interesados para posibles ampliaciones de los temas y conceptos abordados a lo largo de esta Tesis.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer a las personas que de una u otra manera brindaron su colaboración para que este trabajo de Tesis haya llegado a feliz término.

Mis sinceros agradecimientos:

Al personal del Departamento de Mecánica Aplicada, que siempre han puesto a mi entera disposición todos los recursos del Departamento para que esta Tesis sea llevada adelante, y especialmente a su director, Ing. Mario P. Favretto, pilar fundamental de las carreras de posgrado de la Facultad de Ingeniería, que permanentemente veló por la realización de todos los trabajos de Tesis de esta Maestría.

A mis directores, Dr. Ing. Armando M. Awruch y Mag. Ing. Héctor A. Di Rado, por la confianza que depositaron en mí para la ejecución de esta Tesis, y por su permanente guía.

Al personal del Departamento de Computación por su colaboración y paciencia en el mantenimiento de los equipos y sistemas informáticos.

Al cuerpo docente de la carrera de Maestría en Ciencias de la Ingeniería por los conocimientos brindados durante el cursado de materias.

A las autoridades de la Facultad de Ingeniería y de la Universidad Nacional del Nordeste por posibilitar la realización de esta carrera de Maestría, superando muchos inconvenientes operativos y, sobre todo, económicos.

Finalmente, un profundo agradecimiento a mis amigos y familiares, y especialmente a mis padres, Hugo y Magdalena, por todo el apoyo incondicional y por entender que una de las inversiones mas preciadas es la adquisición de conocimientos.

Juan E. Manzollillo

Junio de 2003

LISTA DE SIMBOLOS

Si bien a lo largo del texto se define toda la simbología a medida que se la utiliza, a continuación se ofrece, para revisiones rápidas, una lista de símbolos indicando lo que representan y las páginas donde fueron definidos.

Esta simbología tiene un formato uniforme a lo largo de todo el texto y se corresponde con el comúnmente utilizado en la mayoría de las publicaciones, así por ejemplo, las letras **negritas** se utilizan para la notación tensorial (o matricial compacta) de los tensores y arreglos en general (matrices y vectores), mientras que las letras en *cursivas* con subíndices a la derecha se utilizan para la notación indicial de los mismos. Las variables en general son escritas en *cursiva* y las funciones en letra normal.

Símbolo	Significado	Definido en página		
$\Delta(\bullet)$	incremento de la magnitud (\bullet)	13	$\dot{\chi}$	tasa de acumulación del fluido 64
$(\dot{\bullet})$	tasa de la magnitud (\bullet)	16	δ_{ij}	delta de Kronecker 18
∇	operador gradiente espacial	19	$\delta(\bullet)$	variación virtual de la magnitud (\bullet) 34
$\{\bullet\}$	vector en notación de Voigt	35	$\boldsymbol{\varepsilon}$	deformación lineal material 18
$[\bullet]$	matriz en notación de Voigt	35	$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	deformación logarítmica simétrica 20
$(\bullet)^E$	parte elástica de la magnitud (\bullet)	43	ε_v^P	deformación volumétrica plástica 73
$(\bullet)^P$	parte plástica de la magnitud (\bullet)	43	φ	función movimiento o deformación 15
$\bar{\alpha}$	constante de Biot en la configuración corrotada	61	$\bar{\varphi}$	deformaciones prescritas 21
α	constante de Biot en la configuración actual (deformada)	62	ϕ^*	pendiente de la línea de estados críticos en el plano $p' - q$ 70
$\boldsymbol{\beta}$	relación $\{\mathbf{L}\} - \{\hat{\mathbf{u}}\}$	36	ϕ	coeficiente de fricción interna del suelo en la configuración actual 70
β	variable de endurecimiento (coeficiente de Ayruch – Di Rado)	72	$\bar{\phi}$	coeficiente de fricción interna del suelo en la configuración corrotada 70
$\boldsymbol{\beta}^u$	relación $\{\mathbf{L}\} - \{\hat{\mathbf{u}}\}$ en función de \mathbf{N}^u	66	$\bar{\phi}^*$	coefic. ϕ^* expresado en términos de $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$ 70
χ	coeficiente del criterio de Estados Críticos Modificado	72		

Símbolo	Significado	Definido en página		
γ	peso específico del agua	63	$\tau^{\nabla J}$	tasa Jaumann de la tensión de Kirchhoff
Γ	superficie interna	23		28
η	variación admisible de la deformación	22	$\tau^{\nabla c}$	tasa convectiva de la tensión de Kirchhoff
η	relación de variables del criterio de Estados Críticos Modificado	73		28
∂B	contorno de la geometría inicial B	21	τ^{∇}	tasa objetiva genérica de la tensión de Kirchhoff
$\partial_{\varphi} B$	contorno de B con deformaciones prescriptas	21		31
$\partial_t B$	contorno de B con fuerzas prescriptas	32	$\bar{\tau}'$	tasa de la tensión $\bar{\tau}$ absorbida por la fase sólida
				60
$\partial\varphi(B)$	contorno de la geometría actual $\varphi(B)$	34	$\bar{\tau}^w$	tasa de la tensión $\bar{\tau}$ absorbida por el agua
				60
$\partial_p \varphi(B)$	contorno de $\varphi(B)$ con presiones de poro prescriptas	64	$\bar{\tau}^{pr}$	tasa de la tensión $\bar{\tau}$ generada por la presión de poros
				60
$\partial_v \varphi(B)$	contorno de $\varphi(B)$ con velocidades de fluido prescriptas	64	$\bar{\tau}^w$	tensión $\bar{\tau}$ absorbida por el agua
				60
Λ	multiplicador plástico	44	$(\tau^{\nabla J})'$	tasa de Jaumann de τ absorbida por la fase sólida
μ, λ	constantes de Lamé	42		61
θ	tercer invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	68	$(\tau^{\nabla J})^w$	tasa de Jaumann de τ absorbida por el agua
				61
$\bar{\theta}$	invarian. θ expresado en términos de $\bar{\tau}'$	69	$(\tau^{\nabla J})^{pr}$	tasa de Jaumann de τ generada por la presión de poros
				61
Θ	parámetro para el cálculo de derivadas	67	ν	coeficiente de Poisson
ρ	densidad de masa	18		42
σ	tensor de tensiones Cauchy	22	ω	pendiente de la L. N. C. en el plano $\nu - \ln p'$
$\sigma^{\nabla J}$	tasa de Jaumann de la tensión de Cauchy	27		72
			Ω	tensor de giro
$\sigma^{\nabla T}$	tasa de Truesdell de la tensión de Cauchy	28		19
			\bar{a}	dirección del flujo plástico en la configuración corrotada
$\sigma^{\nabla G}$	tasa de Green-Naghdi de la tensión de Cauchy	29		44
			\bar{a}_i	componentes del vector de flujo plást. \bar{a}
σ^{∇}	tasa objetiva genérica de la tensión de Cauchy	31		54
			a	abscisa al origen de la línea de estados críticos
σ'	tensión efectiva (o de la fase sólida) de Cauchy	59		70
			\bar{a}	coeficiente a expresado en términos de $\bar{\tau}'$
σ^{pr}	tensión en los sólidos debida a la presión de poros	59		70
			A	parámetro de plasticidad
τ	tensor de tensiones de Kirchhoff	24		52
			\mathbf{A}	vector material fuerzas de inercia
τ'	tensión efectiva de Kirchhoff	59		32
			\mathbf{b}	vector espacial fuerzas de masa
τ^{pr}	tensión de Kirchhoff en los sólidos debida a la presión de poros	59		34
			\mathbf{B}	configuración geométrica inicial
τ^w	tensión de Kirchhoff de la fase líquida	60		15
			$\tilde{\mathbf{B}}$	vector material fuerzas de masa
$\bar{\tau}$	tensor corrotado de la tensión de Kirchhoff	24		32
			\mathbf{B}	relación $\{\mathbf{D}\} - \{\dot{\mathbf{u}}\}$
				35
			\mathbf{B}^u	relación $\{\mathbf{D}\} - \{\dot{\mathbf{u}}\}$ en función de \mathbf{N}^u
				66
			\mathbf{c}	función desplazamiento rígido
				25
			c	coeficiente de cohesión del suelo
				70
			\bar{c}	coeficiente de cohesión en la configuración corrotada
				70
			\mathbf{C}	espacio de deformaciones admisibles
				21
			$\mathbf{C}^{\sigma J}$	tensor constitutivo de $\sigma^{\nabla J}$ y \mathbf{D}
				28

Símbolo	Significado	Definido en página		
$C^{\tau J}$	tensor constitutivo de $\tau^{\nabla J}$ y D	28	f	función o tensión efectiva de fluencia
$C^{\sigma T}$	tensor constitutivo de $\sigma^{\nabla T}$ y D	28		configuración actual
C^{τ}	tensor constitutivo de $\tau^{\nabla c} \equiv L_v \tau$ y D	28	F_{ext}	fuerzas nodales externas
$C^{\sigma G}$	tensor constitutivo de $\sigma^{\nabla G}$ y D	29	F_{int}	fuerzas nodales internas
\bar{C}^{τ}	tensor constitutivo de $\dot{\bar{\tau}}$ y \bar{D}	29	F	gradiente de deformación
C^{SE}	tensor constitutivo de \dot{S} y \dot{E}	30	\bar{F}	superficie de fluencia en la configuración corrotada
$C^{\sigma \nabla}$	tensor constitutivo de σ^{∇} y D	31	\tilde{F}_{ext}	fuerzas nodales de flujo externas
$C^{\tau \nabla}$	tensor constitutivo de τ^{∇} y D	31	\bar{g}	tensión de comparación (límite elástico)
C'	tensor constitutivo función de τ y D	42	g	tensión de comparación (límite elástico)
C''	tensor constit. función de τ , W y Ω	42		
C'''	tensor constit. función de τ , L y Ω	45	GRAD	operador gradiente material
\hat{C}^{τ}	tensor constit. C^{τ} con simetría menor	45	H	matriz de flujo asociada a ${}^t \hat{p}$
\bar{C}_{EP}^{τ}	tensor constitutivo de $\dot{\bar{\tau}}$ y $\bar{D} \equiv \dot{\bar{\epsilon}}$	53	H'	parámetro de endurecimiento
C^{sim}	parte simétrica del tensor constit. C'''	45	I	matriz identidad
C^{asim}	parte asimétrica del tensor constit. C'''	46	I_1	primer invariante del tensor σ
\bar{C}_i	coeficientes componentes del vector de flujo plástico \bar{a}	54	\bar{I}_1	primer invariante del tensor $\bar{\tau}$
C^*	ordenada al origen de la línea de estados críticos	70	J	determinante Jacobiano
\bar{C}^*	coeficiente C^* expresado en términos de $\bar{\tau}'$	70	J_2	segundo invariante del tensor desviador de σ
D	tensor velocidad o tasa de deformación	19	\bar{J}_2	segundo invariante del tensor desviador de $\bar{\tau}$
\bar{D}	tasa de deformación corrotada	20	J_3	tercer invar. del tensor desviador de σ
DIV	operador divergencia material	32	\bar{J}_3	tercer invar. del tensor desviador de $\bar{\tau}$
\bar{D}^{pr}	tasa de deformación corrotada provocada por la presión de poros	60	\bar{k}	variables internas de plasticidad en la configuración corrotada
D^{pr}	tasa de deformación provocada por la presión de poros	60	k	variable de endurecimiento
D_{vol}	tasa de deformación volumétrica	64	k_w	coeficiente de compresibilidad del agua
e	deformación lineal espacial	20		
exp	función exponencial	51	k_s	coeficiente de compresibilidad volumétrica de los sólidos
e	relación de vacíos del suelo	71	K	matriz permeabilidad del suelo
E	tensor de deformación de Green	19	K	matriz de rigidez
E	módulo de elasticidad de Young	42	K_{mat}	matriz de rigidez de material
f	fuerza interna unitaria	23	K_{geo}	matriz de rigidez geométrica
\bar{f}	función o tensión efectiva de fluencia configuración corrotada	53	K	pendiente de las líneas de expansión en el plano $v - \ln p'$
			ln	función logaritmo
			L	gradiente espacial de velocidad

Símbolo	Significado	Definido en página		
$L_v \tau$	falsa derivada de la tensión de Kirchhoff	28	R	tensor rotacional 17
$\tilde{\mathbf{L}}$	matriz de flujo asociada a $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{p}}$	66	\mathfrak{R}	vector residuo nodal 38
m	vector de componentes $\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$	61	s	coeficiente de la ecuación de continuidad del fluido 65
n	versor normal al área Γ	23	S	configuración geométrica actual 15
n	porosidad del suelo	64	S	2do. segundo tensor tensiones de Piola-Kirchhoff 22
N	función interpolación del elemento finito	35	\mathbf{S}_1	matriz de flujo asociada a $\dot{\mathbf{p}}$ 66
\mathbf{N}^u	función de interpolación de los desplazamientos	66	t	tiempo 13
\mathbf{N}^p	función de interpolación de la presión de poros	66	t	fuerza interna unitaria 23
p	presión de poros o tensión neutra	59	$\bar{\mathbf{t}}$	fuerza unitaria prescrita 32
\bar{p}	presión de poros prescrita	64	t^*	tiempo ficticio intermedio 47
$\hat{\mathbf{p}}$	presiones de poro nodales	66	$\hat{\mathbf{u}}$	desplazamientos nodales 13
P	1er. tensor de tensiones Piola-Kirchhoff	22	u	desplazamiento de una partícula 15
p'	primer invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	68	U	tensor derecho de elongaciones 17
\bar{p}'	invar. p' expresado en términos de $\bar{\tau}'$	69	v	velocidad espacial del movimiento 16
p_{co}	preconsolidación o límite elástico del criterio de Estados Críticos Modificado	70	\mathbf{v}^w	velocidad espacial del fluido 63
q	segundo invariante del criterio de Estados Críticos Modificado	68	$\bar{\mathbf{v}}^w$	velocidad del fluido prescrita 64
\bar{q}	invarian. q expresado en términos de $\bar{\tau}'$	69	v	volumen específico del suelo 71
Q	matriz de rotación rígida	25	V	velocidad material del movimiento 16
\bar{Q}	potencial plástico en la configuración corrotada	44	V_ϕ	espacio de variaciones espaciales admisibles 22
			V_0	espacio de variaciones materiales admisibles 22
			\dot{w}	potencia mecánica específica 24
			w	funcional energía de deformación 30
			W	tensor de giro o vorticidad 19
			X	coordenadas materiales 15
			x	coordenadas espaciales 15
			\mathbf{x}^*	configuración ficticia intermedia 18
			z	altura geodésica (coordenada verical) 63

Capítulo 1

MECANICA NO LINEAL DE LOS SOLIDOS

1.1 INTRODUCCION.

En este capítulo se presenta el modelo matemático no lineal genérico para cualquier material elastoplástico, sin aplicarlo todavía al material suelo saturado compresible, tarea a ser realizada en el Capítulo 2. Inicialmente se expone la manera en que comúnmente son tratados los problemas estáticos no lineales de la mecánica de los sólidos, adoptándose para este trabajo una descripción Lagrangiana Actualizada de la deformación con la técnica iterativa de Newton – Raphson Modificado. Posteriormente se presentan las medidas de deformaciones y tensiones normalmente utilizadas, y el principio de objetividad que deben cumplir, en problemas con no linealidad geométrica. También se muestran las ecuaciones constitutivas objetivas y las correspondientes tasas objetivas de tensiones mas usadas. La ecuación de equilibrio se plantea inicialmente en términos de tasas de magnitudes materiales, obteniendo luego la forma débil en términos de magnitudes espaciales. La ecuación resultante es discretizada a través del método de los elementos finitos. En las secciones finales del Capítulo se introduce el concepto de elastoplasticidad, desarrollándose un modelo hipoeplastoplástico y otro hipere-

lastoplástico, ambos basados en una descripción del material en términos de las tensiones corrotadas de Kirchhoff. Esta descripción se adoptó para poder representar el comportamiento de materiales anisotrópicos y con el afán de clarificar algunos puntos oscuros que hasta la fecha tienen las formulaciones basadas en estas tensiones, intentando de esta manera realizar algún aporte, por pequeño que fuera, a la literatura especializada del tema. Toda la formulación está desarrollada para estados multiaxiales genéricos, presentándose sólo para casos bidimensionales (que son los que finalmente han sido codificados en el programa computacional) las formas explícitas de las matrices y vectores resultantes de la aplicación del método de los elementos finitos.

1.2 EL ANALISIS NO LINEAL.

En principio se aclara la diferencia entre los conceptos de Linealidad y No Linealidad. Cuando la deformación de un cuerpo sometido a cargas externas es infinitesimalmente pequeña, y la relación entre las tensiones y las deformaciones es linealmente elástica, las cargas y los desplazamientos del cuerpo mantienen en todo momento una relación lineal. Cuando alguno de los supuestos anteriores no se cumple, las cargas y los desplazamientos seguirán una relación no lineal.

Dentro de los problemas no lineales de la mecánica de los sólidos se puede distinguir dos grandes grupos: la No Linealidad Física, y la No Linealidad Geométrica. La No Linealidad Física, también llamada No Linealidad del Material, se presenta cuando la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones va cambiando para distintos niveles de carga, es decir, no es constante a lo largo del proceso de deformación. La No Linealidad Geométrica, en cambio, aparece cuando el cuerpo experimenta grandes desplazamientos o deformaciones, que producen cambios significativos en su configuración geométrica al avanzar el proceso de carga. Por supuesto existen problemas que presentan ambos tipos de no linealidades, y son los que se analizan en esta Tesis. Un tercer y último tipo de no linealidad que aparece en la mecánica de los sólidos es el Cambio en las Condiciones de Borde (o Contorno) a lo largo del proceso de deformación, pero no es un caso que se presente dentro de los problemas de consolidación y asentamientos analizados en este trabajo.

El problema básico en los análisis no lineales es encontrar el estado de equilibrio de un cuerpo correspondiente a las cargas aplicadas. Así, en un sistema de elementos finitos que representa el cuerpo en cuestión, se busca obtener en cada instante $t+\Delta t$ el equilibrio entre las cargas nodales externas ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}}$ y las fuerzas nodales correspondientes a las tensiones internas del cuerpo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}$.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{0} \quad (1.2-1)$$

En todo análisis de grandes deformaciones (no linealidad geométrica) el equilibrio del sistema debe ser alcanzado sobre la geometría actual deformada del cuerpo. Por lo tanto, en los análisis estáticos, que son los tratados en este trabajo, el tiempo t es una variable que define la intensidad de la carga y la correspondiente configuración geométrica equilibrada, en cambio, en los análisis dinámicos y estáticos con materiales tiempo dependientes, el tiempo es una variable fundamental a ser incluida en el modelado del real comportamiento físico.

En algunos análisis estáticos elásticos no lineales las tensiones y configuraciones de equilibrio, correspondientes con niveles de carga específicos, pueden ser calculadas sin resolver el problema para los niveles de carga precedentes, y por lo tanto la solución requerida puede ser alcanzada en un solo paso de tiempo (o de carga). Estos casos son los conocidos como camino independientes. Existen otros casos, los camino dependientes, en los que se requiere resolver la (1.2-1) en todo el rango de tiempo precedente, para lo cual se utiliza una solución incremental paso a paso. Sin embargo, cuando se ingresa al campo plástico todos los problemas se convierten en camino dependientes (ver sección 1.12), por lo tanto es práctica común utilizar, también en el campo elástico, procedimientos incrementales en la solución de problemas tanto camino dependientes como camino independientes.

En la solución incremental paso a paso se asume que la solución para el tiempo t es conocida y que la relación carga – desplazamiento en el incremento de tiempo Δt es lineal:

$${}^t\mathbf{K}\cdot\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^t\mathbf{F}_{\text{int}} \quad (1.2-2)$$

donde ${}^t\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, tangente a la relación carga – desplazamiento, y $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ es el incremento de desplazamientos nodales (o respuesta) que experimenta el cuerpo en el intervalo Δt debido al incremento $\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}$ de las cargas externas:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} = {}^t\mathbf{F}_{\text{ext}} + \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.2-3)$$

Los desplazamientos nodales al tiempo $t+\Delta t$ resultan:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} = {}^t\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}} \quad (1.2-4)$$

pudiéndose calcular también las tensiones y fuerzas nodales internas:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}} = {}^t \mathbf{F}_{\text{int}} + \Delta \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (1.2-5)$$

donde $\Delta \mathbf{F}_{\text{int}}$ es el incremento de las fuerzas internas en el intervalo Δt . Debido a que el comportamiento real del cuerpo es no lineal, la solución anterior está sujeta a errores, cuya magnitud depende del tamaño del paso de tiempo Δt (o de carga) utilizado, por lo tanto será necesario iterar hasta que la solución (1.2-1) sea alcanzada con suficiente precisión. Es común en la práctica adoptar pasos de tiempo Δt suficientemente pequeños para que los errores mencionados no generen inestabilidad numérica, y para que la respuesta de un cuerpo camino dependiente siga el camino físico correcto.

Los métodos de iteración ampliamente utilizados en los análisis no lineales de elementos finitos están basados en la técnica de Newton–Raphson. En este trabajo en particular se optó por utilizar la técnica de Newton–Raphson Modificado (ver Bathe 1996, pag. 758 y 759):

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} &= {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)} \end{aligned} \quad (1.2-6)$$

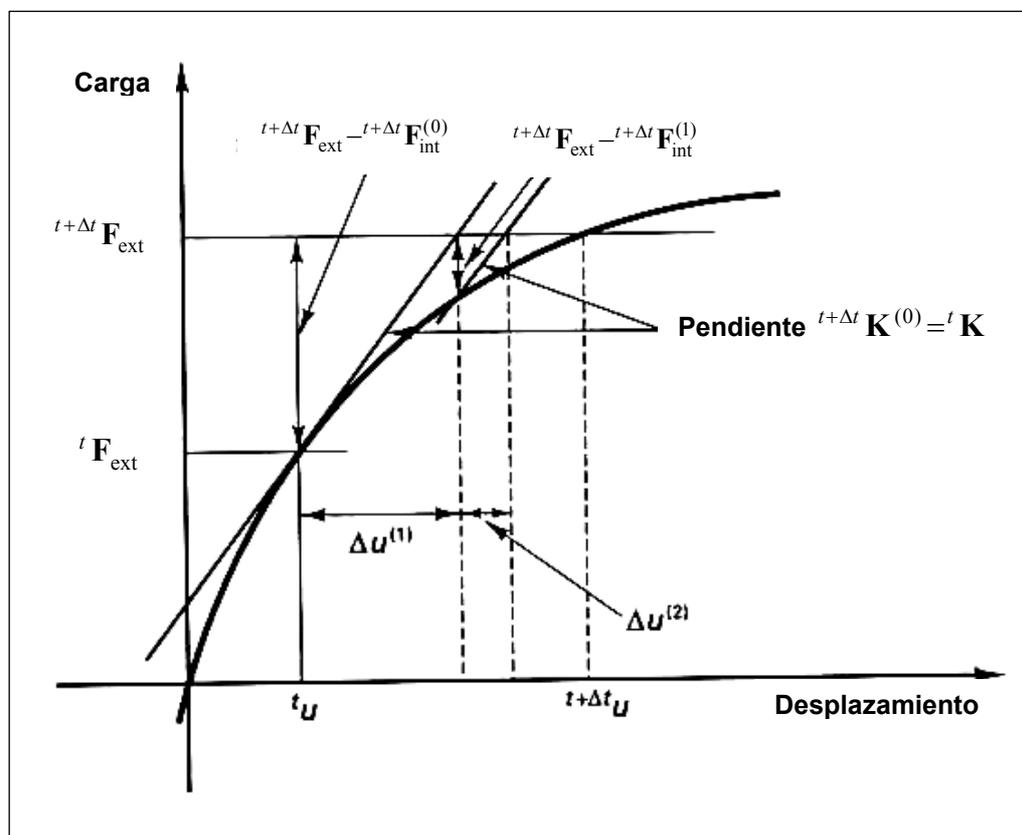


Figura 1-I: Técnica de Newton – Raphson Modificado.

donde el superíndice (i) indica la iteración en curso, y la matriz de rigidez es evaluada sólo al inicio de cada paso de carga (o tiempo). En la Figura 1-I se tiene una representación gráfica de la técnica de Newton-Raphson Modificado para un problema unidimensional. Se elige esta técnica para utilizar, a lo largo de todo el proceso iterativo, configuraciones geométricas equilibradas como configuraciones de referencia, evitando así el uso de configuraciones intermedias no equilibradas, y por lo tanto inexistentes físicamente, como configuraciones de referencia, lo que podría apartar significativamente la respuesta del cuerpo del camino físico real.

1.3 DESCRIPCION DE LA DEFORMACION.

Se define con B a la configuración geométrica inicial de un cuerpo continuo y con $\mathbf{X} \in B$ a las coordenadas materiales, o coordenadas Lagrangianas, que identifican a cada partícula del cuerpo. Dicho de otro modo, B es el conjunto de coordenadas materiales a las que se vincula las partículas del continuo.

Se llama deformación al movimiento total que sufre una fibra de material, el cual es resultado de desplazamientos mas deformaciones específicas (o elongaciones) de la fibra. El movimiento o deformación del cuerpo se describe por una función $\varphi(\mathbf{X}, t)$ que representa la posición espacial de la partícula, como una función del tiempo, a través de las coordenadas espaciales o Eulerianas, dadas por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (1.3-1)$$

El conjunto de estas coordenadas espaciales define la configuración actual deformada del cuerpo $S = \varphi(B)$, con $\mathbf{x} \in S$. La función $\varphi(\mathbf{X}, t)$ también es conocida como mapeo entre las configuraciones inicial (o de referencia, $B \subset \mathbb{R}^3$) y actual (o deformada):

$$\varphi: B \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.3-2)$$

Luego, el desplazamiento de una partícula es la diferencia entre su posición actual y original:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (1.3-3)$$

La descripción de la deformación depende de la elección de las variables independientes, es decir, si se colocan las variables del problema en función de las coordenadas materiales, se tendrá una descripción Lagrangiana, en cambio, si las variables dependientes están en

función de las coordenadas espaciales, resultará una descripción Euleriana. Por ejemplo, se puede hacer una descripción Lagrangiana de la velocidad del movimiento, denominándose velocidad material y expresada como:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3-4)$$

o hacer una descripción Euleriana, denominándose velocidad espacial y dada por:

$$\mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3-5)$$

Por supuesto, el fenómeno físico es el mismo, cambiando las expresiones de las funciones según que variables independientes hayan sido elegidas.

Una malla Lagrangiana de elementos finitos está fija en las coordenadas materiales, es decir está ‘pegada’ a la materia, en consecuencia los elementos se deforman junto con el material, permaneciendo la malla coincidente con el cuerpo a lo largo de toda la deformación. Esto puede producir severas distorsiones en los elementos, por lo tanto es limitada la magnitud de la deformación que puede ser simulada con una malla Lagrangiana. Por otro lado, una malla Euleriana está fija en las coordenadas espaciales, manteniéndose la forma y tamaño de los elementos constantes a lo largo de la deformación. Por supuesto, la malla no permanece coincidente con el cuerpo y se produce traspaso de materia a través de los contornos de los elementos.

Dadas las características mencionadas, la descripción Lagrangiana es la más natural y efectiva a ser utilizada en problemas de mecánica de sólidos, donde se estudia el comportamiento de cada partícula a lo largo de toda la deformación. En tanto, la descripción Euleriana tiene mayor aplicación en problemas de mecánica de fluidos, donde se estudia el comportamiento de la materia que atraviesa un volumen de control estacionario.

Dentro de la descripción Lagrangiana pueden desarrollarse dos tipos de formulaciones:

- Lagrangiana Total: Las medidas de tensiones, deformaciones, derivadas e integrales se realizan sobre las coordenadas materiales o Lagrangianas, es decir, las variables están descritas en la configuración original.
- Lagrangiana Actualizada: Las medidas de tensiones, deformaciones, derivadas e integrales se realizan sobre las coordenadas espaciales o Eulerianas, es decir, las variables están descritas en la configuración actual.

La formulación Lagrangiana total es típicamente aplicada a problemas camino independientes, utilizando medidas totales de tensiones y deformaciones, definidas ambas sobre la configuración original indeformada. La formulación Lagrangiana actualizada, en cambio, se utiliza

en problemas camino dependientes con medidas en tasas de tensiones y deformaciones, definidas sobre la configuración actual o deformada.

1.4 MEDIDAS DE DEFORMACIONES.

Una medida fundamental de la deformación utilizada en la mecánica no lineal del continuo es el gradiente de deformación, definido como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \text{ ó } F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.4-1)$$

El gradiente de deformación describe todas las deformaciones específicas (o elongaciones), desplazamientos y rotaciones que sufre una fibra de material desde la configuración original o de referencia (tiempo 0) hasta la configuración deformada actual (tiempo t). Así, por la regla de diferenciación en cadena, la fibra de material, de longitud $d\mathbf{X}$ en la configuración de referencia, en el tiempo t está dada por:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} \quad (1.4-2)$$

o, inversamente, también se puede escribir:

$$d\mathbf{X} = [\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.4-3)$$

donde:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)} \equiv \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.4-4)$$

Una importante propiedad del gradiente de deformación es que puede ser descompuesto en un único producto de dos tensores, un tensor simétrico definido positivo \mathbf{U} , llamado tensor derecho de elongaciones, y un tensor ortogonal^(*) \mathbf{R} , llamado tensor rotacional:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (1.4-5)$$

Esta relación, conocida como descomposición polar de \mathbf{F} , puede ser probada por descomposición espectral (ver Simo - Hughes 1998, pag. 241-242), o puede ser interpretada conceptualmente, por aplicación de la regla de diferenciación en cadena, diciendo que la deformación total es obtenida aplicando primero las elongaciones y luego las rotaciones, es decir:

(*) Se recuerda del álgebra matricial que:

si \mathbf{M} es matriz simétrica: $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, si \mathbf{M} es matriz antisimétrica: $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$, si \mathbf{M} es matriz ortogonal: $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.4-6)$$

donde \mathbf{x}^* corresponde a una configuración ficticia intermedia en la que se produjeron todas las elongaciones pero ninguna rotación. Por supuesto, esta configuración intermedia es sólo imaginaria, y la expresión a utilizar es la (1.4-5).

Por el principio de conservación de masa, que expresa la indestructibilidad e impenetrabilidad de la materia, el determinante del gradiente de deformación, también conocido como determinante Jacobiano, resulta (ver Malvern 1969, pag. 209):

$$J(\mathbf{X}, t) = \det[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] \equiv \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{d\mathbf{B}} = \frac{\rho_0}{\rho} > 0 \quad (1.4-7)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en la configuración inicial \mathbf{B} , y ρ es la densidad de masa en la configuración actual $\varphi(\mathbf{B})$. La tasa (o derivada material) del determinante Jacobiano puede ser obtenida derivando en el tiempo los términos resultantes de desarrollar el determinante de \mathbf{F} (ver Malvern 1969, pag. 207 y 209):

$$\dot{J} = J \text{traza}(\mathbf{L}) \equiv J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (1.4-8)$$

siendo \mathbf{L} el gradiente espacial de la velocidad, definido mas adelante en (1.4-12).

El gradiente de deformación no es una medida de elongación apta para ser utilizada en ecuaciones constitutivas, puesto que su valor es igual a la unidad, es decir que no se anula, cuando el cuerpo se mantiene indeformado. Además, una medida de deformación adecuada para análisis de no linealidad geométrica debe anularse bajo un movimiento como cuerpo rígido del material, evitando así generar tensiones inexistentes. Por este motivo, tampoco pueden ser utilizadas las medidas de deformación de la elasticidad infinitesimal, como la deformación material lineal (o deformación de ingeniería):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} + \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \right) - \delta_{ij}, \text{ ó } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I} \quad (1.4-9)$$

donde se tuvo en cuenta la (1.3-3), siendo \mathbf{I} el tensor identidad de segundo orden y δ_{ij} el delta de Kronecker, definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.4-10)$$

De (1.4-9) es evidente que para movimientos de cuerpo rígido, esto es $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, resulta $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$.

Una medida de deformación adecuada para ser utilizada en análisis no lineales es el tensor de deformación de Green:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1.4-11)$$

porque en cuerpos indeformados ($\mathbf{F} = \mathbf{I}$) o rotados como rígido ($\mathbf{F} = \mathbf{R}$) se mantiene $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Otra medida de deformación ampliamente utilizada es la tasa de deformación \mathbf{D} (o velocidad de deformación). Para definirla, se presenta primero el gradiente espacial de velocidad \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}, \text{ ó } L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1.4-12)$$

Por la regla de diferenciación en cadena, también se puede escribir:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (1.4-13)$$

donde se tuvo en cuenta la (1.4-4), y que:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.4-14)$$

expresión deducida a partir de (1.4-1), (1.3-4) y (1.3-5).

El gradiente espacial de velocidad puede ser descompuesto aditivamente en una parte simétrica \mathbf{D} y otra antisimétrica \mathbf{W} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (1.4-15)$$

donde \mathbf{D} es el tensor velocidad de deformación y \mathbf{W} es el tensor de giro (o tensor vorticidad), dados por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \text{ ó } D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4-16)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T), \text{ ó } W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4-17)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{F} = (\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T) \mathbf{F} \quad (1.4-18)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es un tensor de giro antisimétrico, expresado como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{L} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T, \text{ ó } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{R} \text{ antisim}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}) \mathbf{R}^T \quad (1.4-19)$$

y reemplazando la última igualdad de (1.4-13) en las primeras de (1.4-16) y (1.4-17), se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (1.4-20)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2} \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{R}^T \quad (1.4-21)$$

Se observa inmediatamente que para una variación como cuerpo rígido del movimiento, esto es $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$, resulta $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}$.

En contraste con la deformación de Green, la velocidad de deformación es una medida en tasas. Tomando la derivada en el tiempo de (1.4-11), y llevando en cuenta las (1.4-16) y (1.4-13), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \quad (1.4-22)$$

Una medida de deformación muy utilizada en el análisis no lineal de materiales anisotrópicos, como se verá en las secciones 1.13 y 1.15, es la tasa de deformación corrotada:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}) \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (1.4-23)$$

la que, al igual que \mathbf{D} , sólo presenta valores no nulos cuando existe una variación en las elongaciones, es decir $\dot{\mathbf{U}} \neq \mathbf{0}$, o en otras palabras, $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ ante variaciones como cuerpo rígido del movimiento. La última igualdad de (1.4-23) muestra la equivalencia entre la tasa de deformación corrotada y la tasa de la deformación logarítmica simétrica $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, estando definida la deformación logarítmica simétrica como:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\ln \mathbf{U} + (\ln \mathbf{U})^T] \quad (1.4-24)$$

En el cálculo incremental será necesario definir algunos tensores de deformación expresados como incrementos y no en tasas. Así surgen, por ejemplo, el tensor gradiente espacial del incremento de desplazamientos, definido análogamente a (1.4-12) como:

$$\nabla \Delta \mathbf{u} = \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{ó} \quad \Delta u_{i,j} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} \quad (1.4-25)$$

La parte simétrica de este tensor es el incremento de deformación lineal espacial, definido sobre la configuración actual deformada, y cuya expresión, análogamente a (1.4-16), está dada por:

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\nabla \Delta \mathbf{u} + \nabla \Delta \mathbf{u}^T), \quad \text{ó} \quad \Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4-26)$$

Expresando en forma de tasas, y recordando la (1.4-23), se obtiene:

$$\frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta t} \cong \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{D} = \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{R}^T, \text{ ó } \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4-27)$$

Esta última expresión es similar a la deformación lineal (1.4-9), excepto que involucra derivadas sobre la configuración actual deformada de la tasa de los desplazamientos.

1.5 ESPACIOS DE DEFORMACIONES Y VARIACIONES ADMISIBLES.

A cada punto de la configuración de referencia B le debe corresponder un único punto de la configuración actual deformada S , además no deben existir vacíos ni superposiciones en S . Por lo tanto, el mapeo $\varphi(\mathbf{X}, t)$ debe ser una función uno a uno y continuamente diferenciable. En consecuencia, y agregando la condición (1.4-7), se puede definir el espacio de deformaciones admisibles:

$$C = \left\{ \varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^3 / \det[\mathbf{F}(\mathbf{X})] > 0 \text{ en } B \text{ y } \varphi|_{\partial_\varphi B} = \bar{\varphi} \right\} \quad (1.5-1)$$

donde $\bar{\varphi}$ son las deformaciones prescritas definidas en una porción $\partial_\varphi B$ del contorno ∂B .

Por supuesto, en la simulación de fenómenos de fractura no se cumplen estas condiciones.

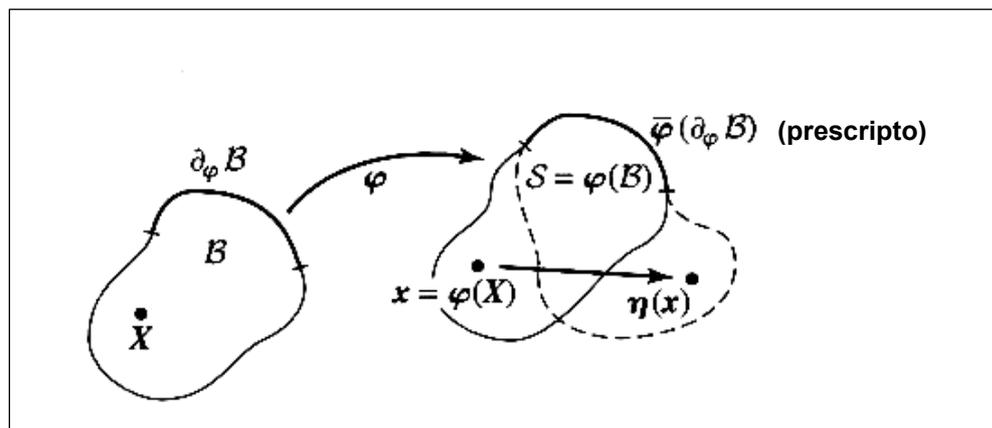


Figura 1-II: Variación espacial admisible superpuesta a la configuración deformada.

Nótese que $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \bar{\varphi}(\partial_\varphi B)$.

Se define como variaciones admisibles de φ a la superposición sobre $\varphi(\mathcal{B})$ de desplazamientos que no violan las condiciones de borde prescriptas, según la Figura 1-II. Estas variaciones abren un espacio lineal denotado con V_φ y definido como:

$$V_\varphi = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{\eta}(\varphi(\mathbf{X})) = \mathbf{0} \text{ para } \varphi(\mathbf{X}) \in \overline{\varphi(\partial_\varphi \mathcal{B})} \right\} \quad (1.5-2)$$

Nótese que V_φ cambia con cada $\varphi \in \mathcal{C}$, por lo tanto se denomina variación espacial a cada elemento $\boldsymbol{\eta} \in V_\varphi$. Mediante un cambio de variables se define la variación material:

$$\boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\eta}(\varphi(\mathbf{X})), \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in V_\varphi \quad (1.5-3)$$

Estas variaciones materiales, análogamente, abren un espacio lineal de variaciones admisibles en coordenadas materiales:

$$V_0 = \left\{ \boldsymbol{\eta}_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3 / \boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{X} \in \partial_\varphi \mathcal{B} \right\} \quad (1.5-4)$$

A partir de (1.5-3), por la regla de diferenciación en cadena, se tiene:

$$\frac{\partial \eta_{0i}}{\partial X_j} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j}, \quad \text{ó} \quad \text{GRAD } \boldsymbol{\eta}_0 = \nabla \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F} \quad (1.5-5)$$

Una importante observación a realizar es que: la velocidad espacial (1.3-5), para un tiempo fijo t , es una variación admisible, esto es $\mathbf{v}(\bullet, t) \in V_{t_\varphi}$, debido a que para cada $\mathbf{x} \in {}^t\varphi(\mathcal{B})$ existe un vector $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$, es decir $\mathbf{v}(\bullet, t) : {}^t\varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, y además $\mathbf{v}(\bullet, t)$ se desvanece en los contornos prescriptos, es decir $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \overline{\varphi(\partial_\varphi \mathcal{B})}$. Por lo tanto, ${}^t\mathbf{v} = \mathbf{v}(\bullet, t)$ satisface las condiciones de (1.5-2), y por supuesto ${}^t\mathbf{V}(\mathbf{X}) = {}^t\mathbf{v}(\varphi(\mathbf{X}))$ satisface las de (1.5-4), resultando $\mathbf{V}(\bullet, t)$ un elemento de V_0 .

1.6 MEDIDAS DE TENSIONES.

En la mecánica no lineal de los medios continuos se utilizan normalmente varios tensores de tensiones, tales como: el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, el primer tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} y el segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , entre otros. Con ayuda de la Figura 1-III se puede realizar una interpretación física de estas distintas medidas de tensiones. El diferencial de fuerza, medido en la configuración de referencia, es:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 \cdot d\Gamma_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot d\Gamma_0 \quad (1.6-1)$$

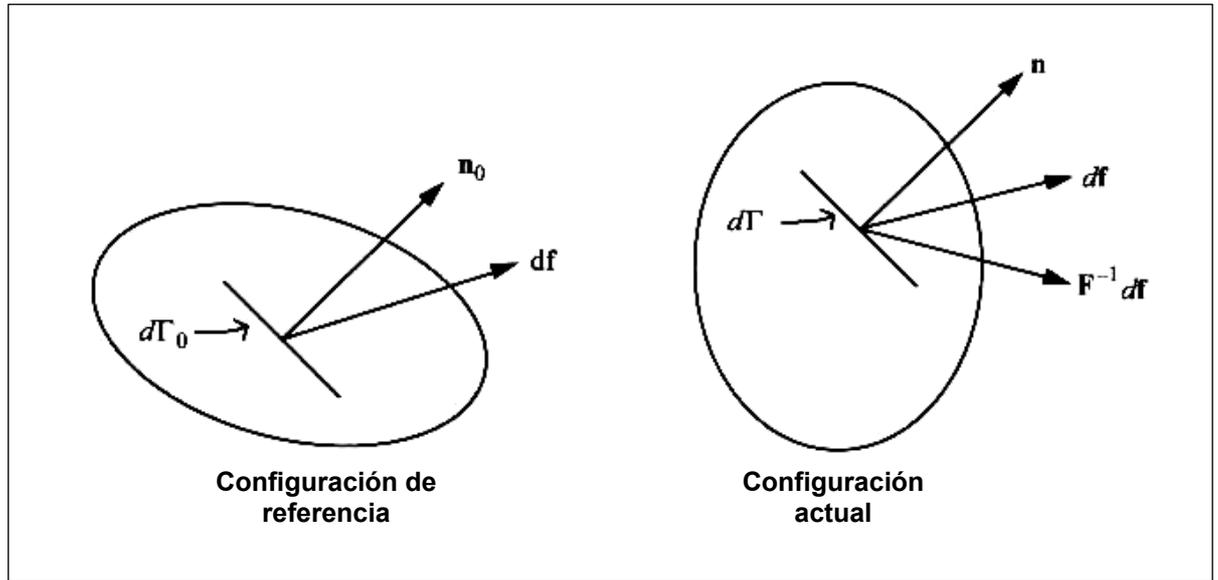


Figura 1-III: Definición de las medidas de tensiones.

y medido en la configuración actual resulta:

$$df = \mathbf{t}.d\Gamma = \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}.d\Gamma \quad (1.6-2)$$

donde \mathbf{t}_0 es la fuerza unitaria (fuerza por unidad de área) actuante en la superficie $d\Gamma_0$, y \mathbf{t} es la actuante en $d\Gamma$. Los versores normales \mathbf{n}_0 y \mathbf{n} definen la posición de los planos de área $d\Gamma_0$ y $d\Gamma$, respectivamente. La (1.6-2) involucra la fuerza unitaria y la superficie de la configuración actual, por esta razón la tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es llamada con frecuencia tensión física o tensión verdadera. Como es sabido, por el teorema de conservación de momento angular (o teorema de Cauchy), el tensor de Cauchy es simétrico. Por otro lado, la primer tensión de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} , de acuerdo a la (1.6-1), tiene una definición similar a la de Cauchy, excepto que está expresada en términos de la fuerza unitaria y superficie de la configuración de referencia o indeformada. Este tensor no es simétrico y su traspuesta \mathbf{P}^T es llamada tensión nominal. Con el objeto de obtener un tensor simétrico, la (1.6-1) es transformada con \mathbf{F}^{-1} , definiéndose así el segundo tensor de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} a partir de la siguiente relación:

$$\mathbf{F}^{-1}.df = \mathbf{F}^{-1}.\mathbf{t}_0.d\Gamma_0 = \mathbf{S}.\mathbf{n}_0.d\Gamma_0 \quad (1.6-3)$$

La relación entre los versores normales, en las configuraciones de referencia y deformada, viene dada por la relación de Nanson (ver Malvern 1969, pag. 169):

$$\mathbf{n}.d\Gamma = J.\mathbf{n}_0.\mathbf{F}^{-1}.d\Gamma_0 \quad (1.6-4)$$

donde $J = \det(\mathbf{F})$. Luego, teniendo en cuenta la igualdad de (1.6-1) y (1.6-2), e incorporando la (1.6-4), usando la notación indicial, se llega a:

$$\begin{aligned} df_i &= P_{ik} n_{0k} d\Gamma_0 = \sigma_{ik} J n_{0l} (F^{-1})_{lk} d\Gamma_0 = J \sigma_{ik} (F^{-1})_{lk} n_{0l} d\Gamma_0, \text{ ó} \\ d\mathbf{f} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot d\Gamma_0 = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot d\Gamma_0 \end{aligned} \quad (1.6-5)$$

de donde se deduce:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.6-6)$$

Premultiplicando la (1.6-3) por \mathbf{F} , e igualando a la (1.6-1) se tiene:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \quad (1.6-7)$$

Y comparando las (1.6-6) y (1.6-7), se llega a:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.6-8)$$

Estas y otras medidas de tensiones pueden definirse también, a partir del principio de conservación de energía (ver Belytschko – Liu – Moran 2000, pag. 122 a 125), como trabajo conjugadas de las distintas medidas de deformaciones. Estableciendo la igualdad de la potencia mecánica (o tasa de energía) específica en la configuración indeformada, $\rho_0 \dot{w}$, se puede escribir:

$$\rho_0 \dot{w} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (1.6-9)$$

de donde, en base a las definiciones de las medidas de deformaciones, dadas en la sección 1.4, se puede despejar las relaciones entre las distintas medidas de tensiones. Las relaciones entre $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{P} y \mathbf{S} son las dadas en (1.6-6), (1.6-7) y (1.6-8). Mientras que, el tensor de tensiones de Kirchhoff queda definido como:

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (1.6-10)$$

y el tensor corrotado de la tensión de Kirchhoff (o simplemente tensión corrotacional de Kirchhoff), como:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R} = J \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{U} \quad (1.6-11)$$

1.7 MOVIMIENTOS SUPERPUESTOS DE CUERPO RIGIDO. OBJETIVIDAD.

Considérese un movimiento de cuerpo rígido superpuesto a la deformación $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$. La posición $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ de cada partícula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ cambia a:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t).\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B}) \quad (1.7-1)$$

donde $\mathbf{c}(t)$ es una función sólo del tiempo que representa un desplazamiento, y $\mathbf{Q}(t)$ es una matriz ortogonal, función sólo del tiempo, que representa una rotación. El movimiento es llamado rígido porque se preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$:

$$\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+ = \mathbf{Q}(t).(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \Rightarrow \|\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+\|^2 = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 \quad (1.7-2)$$

donde $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T . (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ es el cuadrado de la distancia Euclidiana.

El gradiente de deformación, ante un movimiento de este tipo, se transforma en:

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t).\mathbf{F} \quad (1.7-3)$$

Un tensor espacial se dice objetivo cuando ante un movimiento como cuerpo rígido se transforma según las reglas de transformación de tensores, es decir, para tensores de segundo orden, según el doble producto de matrices de rotación:

$$(\bullet)^+ = \mathbf{Q}(t).(\bullet).\mathbf{Q}(t)^T \quad (1.7-4)$$

donde (\bullet) es un tensor objetivo de segundo orden.

El gradiente espacial de velocidad, teniendo en cuenta (1.4-13) y (1.7-3), resulta:

$$\mathbf{L}^+ = \dot{\mathbf{F}}^+ . (\mathbf{F}^+)^{-1} = \mathbf{Q}.\mathbf{L}.\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T \quad (1.7-5)$$

el cual no se transforma objetivamente debido al término adicional antisimétrico $\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T$. Sin embargo, de acuerdo a (1.4-16) y (1.7-5), la velocidad de deformación se transforma objetivamente:

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{Q}.\mathbf{D}.\mathbf{Q}^T \quad (1.7-6)$$

Mientras que, de acuerdo a la (1.4-17), el tensor rotación resulta no objetivo:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{Q}.\mathbf{W}.\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T \quad (1.7-7)$$

Los tensores materiales, que son tensores definidos en la configuración de referencia, permanecen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido. Así, por ejemplo, de (1.4-11) y (1.7-3):

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^+)^T . \mathbf{F}^+ - \mathbf{I}^+] = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T . \mathbf{Q}^T . \mathbf{Q} . \mathbf{F} - \mathbf{I}) \equiv \mathbf{E} \quad (1.7-8)$$

Lo mismo sucede con \mathbf{U} , de (1.4-5) y (1.7-3):

$$\mathbf{U}^+ = [(\mathbf{F}^+)^T . \mathbf{F}^+]^{1/2} = (\mathbf{F}^T . \mathbf{Q}^T . \mathbf{Q} . \mathbf{F})^{1/2} = (\mathbf{F}^T . \mathbf{F})^{1/2} \equiv \mathbf{U} \quad (1.7-9)$$

Por lo tanto, se deduce:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{F}^+ \cdot (\mathbf{U}^+)^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \quad (1.7-10)$$

y también, de (1.4-19):

$$\mathbf{\Omega}^+ = \dot{\mathbf{R}}^+ \cdot (\mathbf{R}^+)^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.7-11)$$

El tensor de tensiones de Cauchy es objetivo, es decir que cumple:

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.7-12)$$

pero su tasa, que viene dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (1.7-13)$$

resulta claramente no objetiva debido a los últimos dos términos. En la expresión anterior se utilizó la derivada de la inversa:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}^{-1}) = -\mathbf{Q}^{-1} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.7-14)$$

Análogamente, el tensor de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ es objetivo, es decir:

$$\boldsymbol{\tau}^+ = J\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.7-15)$$

sin embargo, su tasa es no objetiva:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^+ = \mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^+ \cdot (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad (1.7-16)$$

Al igual que los tensores materiales, los tensores espaciales definidos en configuraciones corrotadas, como por ejemplo (1.4-23) y (1.6-11), se mantienen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido:

$$\bar{\mathbf{D}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T \cdot \mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \equiv \bar{\mathbf{D}} \quad (1.7-17)$$

y

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T \cdot \boldsymbol{\tau}^+ \cdot \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.7-18)$$

Por supuesto, los escalares tampoco se ven afectados por estos movimientos de cuerpo rígido. Por ejemplo, de (1.4-7) y (1.7-3), y teniendo en cuenta que el determinante de cualquier matriz de rotación es igual a la unidad, se obtiene:

$$J^+ = \det(\mathbf{F}^+) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \equiv J \quad (1.7-19)$$

1.8 ECUACIONES CONSTITUTIVAS OBJETIVAS.

En las soluciones incrementales las ecuaciones constitutivas relacionan tasas de tensiones con tasas de deformaciones específicas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}, \text{ ó } \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (1.8-1)$$

Pero la anterior no es una ecuación válida a ser utilizada cuando se producen rotaciones de cuerpo rígido. Para ilustrar el problema, considérese la barra de la Figura 1-IV sometida a una tensión inicial $\sigma_x = \sigma_0$. Luego la barra es sometida a una rotación de 90° sin elongación alguna (movimiento de cuerpo rígido), en consecuencia, como se vio en la sección 1.4, resulta $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Sin embargo, en la Figura se aprecia como cambian las tensiones de Cauchy, haciendo que $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, se puede pensar que ‘algo’ le falta a la ecuación (1.8-1), y es precisamente tener en cuenta las rotaciones como cuerpo rígido del material.

Además, si se hubiera producido una elongación de la barra, por ejemplo en la posición final, se hubiese generado un incremento $\Delta\sigma$ en la tensión, que no podría sumarse directamente a la tensión del estado anterior para obtener la tensión actual:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \neq {}^t \boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 + \Delta\sigma \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta\sigma \end{bmatrix} \quad (1.8-2)$$

Las rotaciones como cuerpo rígido son tenidas en cuenta por las tasas objetivas de los tensores de tensiones. Uno de estos tensores objetivos es la tasa de Jaumann de la tensión de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T \quad (1.8-3)$$

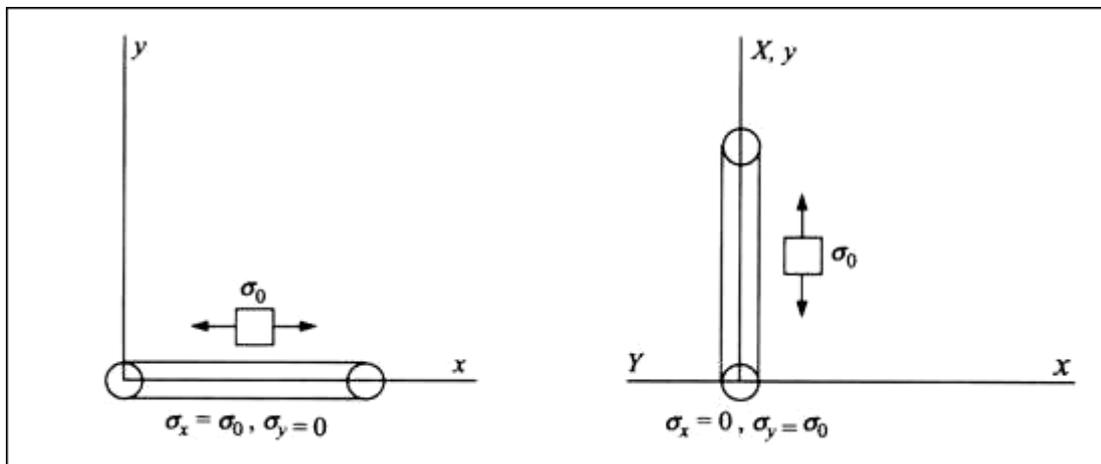


Figura 1-IV: Cambio en las tensiones de Cauchy debido a una rotación de cuerpo rígido.

cuya ecuación constitutiva en tasa objetiva es:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}, \text{ ó } \sigma_{ij}^{\nabla J} = C_{ijkl}^{\sigma J} D_{kl} \quad (1.8-4)$$

donde $\mathbf{C}^{\sigma J}$ es el tensor constitutivo de cuarto orden, que contiene las características del material, correspondiente a esta medida de tensiones. Por lo tanto, la forma correcta de la ecuación (1.8-1), para el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy, es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T = \underbrace{\mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}}_{\text{material}} + \underbrace{\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T}_{\text{rotación}} \quad (1.8-5)$$

Se aprecia que el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy está compuesto de dos partes: la respuesta objetiva del material, debido a deformaciones específicas, y el cambio de las tensiones debido a las rotaciones de cuerpo rígido.

Muchas de las ecuaciones de la mecánica no lineal son obtenidas de manera elegante y simple cuando están expresadas en términos de tasas de la tensión de Kirchhoff. En consecuencia, se define la tasa objetiva de Jaumann del tensor de Kirchhoff como:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^T = \mathbf{C}^{\tau J} : \mathbf{D} \quad (1.8-6)$$

Otros tensores tasas objetivas usados frecuentemente son la tasa de Truesdell y la tasa de Green-Naghdi de la tensión de Cauchy. La tasa de Truesdell de la tensión de Cauchy viene definida como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \text{traza}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\sigma T} : \mathbf{D} \quad (1.8-7)$$

la cual difiere en sólo un escalar, $J = \det(\mathbf{F})$, de la tasa convectiva de la tensión de Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} = J[\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \text{traza}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma}] = J\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} \quad (1.8-8)$$

Por esta razón a $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$ también se la denomina tasa ponderada de Truesdell. Teniendo en cuenta la primer igualdad de (1.6-10), y recordando (1.4-8), la (1.8-8) puede ser escrita como:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} \equiv L_v \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L}^T = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D} \quad (1.8-9)$$

donde $L_v \boldsymbol{\tau}$ es la falsa derivada de la tensión de Kirchhoff, definida como:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \mathbf{F}^T \quad (1.8-10)$$

la cual es totalmente equivalente a la tasa convectiva. La equivalencia de (1.8-9) y (1.8-10) se demuestra utilizando la (1.7-14) en función de \mathbf{F} , y recordando la (1.4-13). La relación entre $\boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$ (1.8-8) y $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$ (1.8-6) puede ser establecida aplicando la (1.4-15), obteniéndose:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} \equiv L_v \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\nabla J} - \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} \quad (1.8-11)$$

La tasa de Green-Naghdi de la tensión de Cauchy es definida como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega}^T = \mathbf{C}^{\sigma G} : \mathbf{D} \quad (1.8-12)$$

La objetividad de estos tensores tasa se prueba fácilmente teniendo en cuenta las expresiones (1.7-5), (1.7-7), (1.7-11), (1.7-12) y (1.7-13), obteniéndose:

$$(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J})^+ = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ - \mathbf{W}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot (\mathbf{W}^+)^T = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.8-13)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T})^+ = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ - \mathbf{L}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot (\mathbf{L}^+)^T + \text{traza}(\mathbf{L}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.8-14)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^{\nabla G})^+ = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ - \boldsymbol{\Omega}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot (\boldsymbol{\Omega}^+)^T = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\nabla G} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.8-15)$$

A partir de (1.8-8), (1.7-19) y (1.8-14), la objetividad de $L_v \boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\tau}^{\nabla c}$ es inmediata.

Cualquiera de los tensores tasas objetivas anteriores puede ser utilizado para calcular $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, en consecuencia, para que el resultado no varíe, los tensores constitutivos \mathbf{C} deben diferir según la tasa objetiva elegida. Por lo tanto, se les agrega superíndices para especificar la tasa objetiva a la que está asociada.

Por último, también se pueden definir ecuaciones constitutivas en términos de magnitudes corrotadas:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}} \quad (1.8-16)$$

Por supuesto, estas ecuaciones son insensibles a cualquier movimiento espacial superpuesto de cuerpo rígido. En (1.7-17) se demostró que $\bar{\mathbf{D}}^+ = \bar{\mathbf{D}}$, en tanto, la tasa de la tensión corrotada de Kirchhoff, recordando (1.6-11), (1.7-14) en términos de \mathbf{R} , y (1.4-19), resulta:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T \cdot (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{R} \quad (1.8-17)$$

Luego, a partir de (1.7-10), (1.7-11), (1.7-15) y (1.7-16), se obtiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T \cdot (\dot{\boldsymbol{\tau}}^+ - \boldsymbol{\Omega}^+ \cdot \boldsymbol{\tau}^+ + \boldsymbol{\tau}^+ \cdot \boldsymbol{\Omega}^+) \cdot \mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T \cdot (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{R} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.8-18)$$

demostrándose que $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ también es insensible a rotaciones de cuerpo rígido.

1.9 ELASTICIDAD NO LINEAL

Los materiales para los cuales el trabajo, de las tensiones a través de las deformaciones, es independiente del camino o historia de la carga son llamados materiales hiperelásticos o de Green. Estos materiales están caracterizados por la existencia de un funcional w de energía almacenada (o energía de deformación) que permite obtener las tensiones en función sólo del estado actual de deformaciones:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \text{ ó } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \frac{\partial w(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{F}^T \quad (1.9-1)$$

donde el segundo tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff \mathbf{S} es trabajo conjugado del tensor de deformaciones de Green \mathbf{E} . En la segunda expresión se tuvo en cuenta la (1.6-10).

La relación constitutiva se establece como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{\text{SE}} : \mathbf{E}, \text{ ó } S_{ij} = C_{ijkl}^{\text{SE}} E_{kl} \quad (1.9-2)$$

donde \mathbf{C}^{SE} es el tensor constitutivo elástico, constante, de cuarto orden que contiene los coeficientes del material.

La energía de deformación por unidad de volumen, para un estado multiaxial de tensiones, está dada por:

$$w = \int S_{ij} dE_{ij} = \int C_{ijkl}^{\text{SE}} E_{kl} dE_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{\text{SE}} E_{ij} E_{kl} \quad (1.9-3)$$

La existencia de este funcional implica reversibilidad, camino independencia y ausencia de disipación de energía en el proceso de deformación (ver Belytschko – Liu - Moran 2000, pag. 221 a 223).

La correspondiente relación constitutiva en tasas es:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{\text{SE}} : \dot{\mathbf{E}}, \text{ ó } \dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{SE}} \dot{E}_{kl} \quad (1.9-4)$$

aquí \mathbf{C}^{SE} es llamado tensor constitutivo tangente. Como la energía de deformación es asumida definida positiva, es decir:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}^{\text{SE}} : \mathbf{E} \geq 0 \quad \forall \mathbf{E} \quad (1.9-5)$$

entonces \mathbf{C}^{SE} es un tensor definido positivo. Además, debido a la existencia del funcional w , surge:

$$\mathbf{C}^{\text{SE}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}, \text{ ó } C_{ijkl}^{\text{SE}} = \frac{\partial^2 w}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (1.9-6)$$

Y como w es una función de \mathbf{E} con diferenciación continua, se cumple:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial^2 w}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} \quad (1.9-7)$$

Por lo tanto, \mathbf{C}^{SE} presenta simetría mayor:

$$C_{ijkl}^{\text{SE}} = C_{klij}^{\text{SE}} \quad (1.9-8)$$

Además, debido a la simetría de los tensores de tensiones y deformaciones en (1.9-2), el tensor constitutivo presenta simetría menor:

$$C_{ijkl}^{SE} = C_{jikl}^{SE} = C_{ijlk}^{SE} \quad (1.9-9)$$

La (1.9-4) es una ecuación constitutiva hiperelástica en términos de tasas de magnitudes materiales, pero también puede escribirse en términos de tasas de magnitudes espaciales. Por ejemplo, recordando la primer igualdad de (1.8-10) y teniendo en cuenta la última de (1.4-22), en notación indicial, se deduce:

$$\begin{aligned} L_v \tau_{ij} &= F_{im} (C_{mnpq}^{SE} \dot{E}_{pq}) F_{jn} = F_{im} (C_{mnpq}^{SE} F_{kp} D_{kl} F_{lq}) F_{jn} \\ &= F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C_{mnpq}^{SE} D_{kl} = C_{ijkl}^{\tau} D_{kl} \end{aligned} \quad (1.9-10)$$

de donde:

$$C_{ijkl}^{\tau} = F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C_{mnpq}^{SE} \quad (1.9-11)$$

Por lo tanto, la correspondiente ecuación constitutiva hiperelástica espacial en tasas es:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D} \quad (1.9-12)$$

Expresiones análogas pueden ser obtenidas para cualquiera de los tensores tasas objetivas vistos en la sección 1.8, deduciéndolas a partir de las relaciones entre dichos tensores.

Una importante consideración a realizar es que, a partir de relaciones hiperelásticas invariantes de la forma (1.9-1), se pueden deducir ecuaciones constitutivas espaciales en tasas, también invariantes, de la forma (1.9-12). Pero la inversa no se cumple, es decir, a partir de cualquier ecuación en tasas de la forma (1.9-12) (cualquier tensor constitutivo \mathbf{C}), no siempre es posible obtener un funcional de energía almacenada w tal que las tensiones sean calculadas con (1.9-1) (ver Simo - Hughes 1998, pag. 258).

Las ecuaciones constitutivas en tasas de la forma (1.9-12) que no derivan de un funcional de energía almacenada se denominan relaciones hipoelásticas. En forma genérica, las relaciones hipoelásticas, se expresan como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\sigma\nabla} : \mathbf{D}, \text{ ó } \boldsymbol{\tau}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D} \quad (1.9-13)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ y $\boldsymbol{\tau}^{\nabla}$ son cualquiera de las tasas objetivas de la tensión de Cauchy y Kirchhoff, respectivamente, y, $\mathbf{C}^{\sigma\nabla}$ y $\mathbf{C}^{\tau\nabla}$ son sus correspondientes tensores constitutivos. En hipoelasticidad es común considerar que alguno de estos \mathbf{C} es igual al tensor constitutivo constante obtenido de la teoría de elasticidad infinitesimal, en consecuencia, \mathbf{C} posee simetría mayor (1.9-8). Y como la tasa de deformación \mathbf{D} y las tasas objetivas de tensiones son simétricas, \mathbf{C} también posee simetría menor (1.9-9).

Un punto de fundamental importancia en el modelado del comportamiento del material es la elección de la ecuación constitutiva hipoelástica (1.9-13). Por lo tanto, para decidir cual tasa objetiva de tensiones se relacionará a la tasa de deformaciones a través del tensor constitutivo de elasticidad infinitesimal, se tienen en cuenta distintos requerimientos, como la simetría de la matriz de rigidez tangente de un sistema de elementos finitos y la indiferencia referencial de las constantes del material. Esto será visto en detalle en la sección 1.13.

Una relación del tipo (1.9-13) es incrementalmente lineal y reversible, esto significa que para pequeños incrementos de deformación sobre un cuerpo finitamente deformado, los incrementos de tensiones y deformaciones están linealmente relacionados y son recuperados en la descarga. Sin embargo, para grandes deformaciones, la energía no es necesariamente conservada y el trabajo realizado en un ciclo cerrado de deformación no es necesariamente igual a cero. A pesar de esto, como se verá en la sección 1.13, las leyes (o relaciones) hipoelásticas son ampliamente utilizadas en el desarrollo de modelos elastoplásticos cuando las deformaciones elásticas son pequeñas, y por ende el trabajo remanente en un ciclo cerrado elástico también es pequeño.

1.10 FORMA DEBIL DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO EXPRESADA EN TASAS.

La descripción Lagrangiana de la ecuación de movimiento, o ecuación de conservación de momento, está dada por (ver Belytschko – Liu - Moran 2000, pag. 120 y 121):

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \tilde{\mathbf{B}} = \rho_0 \mathbf{A}, \text{ ó } \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 \tilde{B}_i = \rho_0 \frac{\partial V_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \text{en } B \quad (1.10-1)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en la configuración de referencia B , \mathbf{P} es la primer tensión de Piola-Kirchhoff, $\tilde{\mathbf{B}}$ son las fuerzas de masa y \mathbf{A} las fuerzas de inercia. Además, recordando la (1.6-1), las fuerzas de superficie vienen dadas por:

$$\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \Big|_{\partial_t B} \quad (1.10-2)$$

donde $\bar{\mathbf{t}}_0$ es la fuerza unitaria prescrita en una porción $\partial_t B$ del contorno ∂B .

En problemas estáticos las aceleraciones (o fuerzas de inercia) son despreciadas, obteniéndose la ecuación de equilibrio:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad \text{en } B \quad (1.10-3)$$

La forma en tasas de esta ecuación, necesaria en las soluciones incrementales, se calcula asumiendo que las cargas de masa $\tilde{\mathbf{B}}$ y las de superficie $\bar{\mathbf{t}}_0$ son configuracionalmente independientes, es decir, no dependen de la deformación φ . Entonces, la ecuación de equilibrio en tasas se escribe como:

$$\text{DIV } {}^t \dot{\mathbf{P}} + \rho_0 \dot{\tilde{\mathbf{B}}} = \mathbf{0} \quad \text{en } B \quad (1.10-4)$$

Expresión válida para un incremento de carga dado por $\dot{\tilde{\mathbf{B}}}$ y $\dot{\bar{\mathbf{t}}}_0$ en un cierto tiempo fijo t .

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial (1.10-4), se la ortogonaliza, aplicando el método de residuos ponderados, con cualquier elemento de $\boldsymbol{\eta}_0 \in V_0$ (1.5-4), y se integra sobre la configuración inicial:

$$\int_B \text{DIV } {}^t \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dB + \int_B \rho_0 \dot{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dB = 0 \quad (1.10-5)$$

La forma débil se obtiene utilizando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_B \text{DIV } {}^t \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dB &= \int_B \text{DIV } ({}^t \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0) dB - \int_B {}^t \dot{\mathbf{P}} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 dB \\ &= \int_{\partial B} {}^t \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\partial B - \int_B {}^t \dot{\mathbf{P}} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 dB \end{aligned} \quad (1.10-6)$$

Teniendo en cuenta que $\int_{\partial B} {}^t \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\partial B = \int_{\partial_t B} \dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\partial B$, la (1.10-5) finalmente queda:

$$\int_B {}^t \dot{\mathbf{P}} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 dB - \int_B \rho_0 \dot{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 dB - \int_{\partial_t B} \dot{\bar{\mathbf{t}}}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 d\partial B = 0 \quad (1.10-7)$$

Para llevar esta expresión a magnitudes espaciales, se transforma inicialmente el primer término, teniendo en cuenta las (1.6-7), (1.4-13), (1.6-10), (1.8-10) y (1.5-5):

$$\begin{aligned} {}^t \dot{\mathbf{P}} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 &= [{}^t \dot{\mathbf{F}} \cdot {}^t \mathbf{S} + {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \dot{\mathbf{S}}] : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \mathbf{S} + {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \dot{\mathbf{S}}] : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \mathbf{S} \cdot {}^t \mathbf{F}^T + {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \dot{\mathbf{S}} \cdot {}^t \mathbf{F}^T] \cdot {}^t \mathbf{F}^{-T} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \\ &= [{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} + {}^t L_v \boldsymbol{\tau}] : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1} \\ &= [{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} + {}^t L_v \boldsymbol{\tau}] : {}^t \nabla \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (1.10-8)$$

En la transformación de los últimos dos términos de la (1.10-7), se recuerda de (1.4-7) que:

$$d\mathbf{B} = \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{J}, \text{ y } \rho = \frac{\rho_0}{J} \quad (1.10-9)$$

Las fuerzas por unidad de masa son independientes de la configuración en que se miden, entonces: $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$. Además, de (1.5-3) se tiene que: $\boldsymbol{\eta}_0(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})$, e igualando (1.6-1) y (1.6-2) en el contorno del cuerpo surge: $\bar{\mathbf{t}}_0 \cdot d\partial\mathbf{B} = \bar{\mathbf{t}} \cdot d\partial\varphi(\mathbf{B})$. Por lo tanto, la (1.10-7) en el tiempo fijo t y en magnitudes espaciales resulta:

$$\int_{\varphi(\mathbf{B})} [{}^t\mathbf{L} : {}^t\boldsymbol{\tau} + {}^tL_v \boldsymbol{\tau}] : {}^t\nabla\boldsymbol{\eta} \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{J} = \int_{\varphi(\mathbf{B})} \dot{\mathbf{b}} \cdot {}^t\boldsymbol{\eta} \cdot \rho \cdot d\varphi(\mathbf{B}) + \int_{\partial\varphi(\mathbf{B})} \dot{\mathbf{t}} \cdot {}^t\boldsymbol{\eta} \cdot d\partial\varphi(\mathbf{B}) \quad (1.10-10)$$

De acuerdo a lo comentado al final de la sección 1.5 (la velocidad espacial, en un tiempo fijo t , es una variación admisible ${}^t\mathbf{v} \in V_{t,\varphi}$), se puede sustituir ${}^t\boldsymbol{\eta}$ por ${}^t\mathbf{v}$, y ${}^t\nabla\boldsymbol{\eta}$ por ${}^t\mathbf{L} = {}^t\nabla\mathbf{v}$. En la expresión (1.10-10) se agrega el símbolo δ para indicar el carácter virtual de estas variaciones de la deformación. Recordando además que: $L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$, la (1.10-10) queda expresada:

$$\int_{\varphi(\mathbf{B})} {}^t\delta\mathbf{L} : [{}^t\mathbf{L} : {}^t\boldsymbol{\tau} + {}^t\mathbf{C}^\tau : {}^t\mathbf{D}] \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{J} = \int_{\varphi(\mathbf{B})} {}^t\delta\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(\mathbf{B}) + \int_{\partial\varphi(\mathbf{B})} {}^t\delta\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial\varphi(\mathbf{B}) \quad (1.10-11)$$

Esta es la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, que permite calcular, en un cierto tiempo t , la velocidad espacial actual ${}^t\mathbf{v}$, para una cierta carga, dada por el miembro derecho de (1.10-11), sobre una cierta configuración ${}^t\varphi$ en la que se halla en equilibrio un cierto campo de tensiones ${}^t\boldsymbol{\tau}$.

1.11 IMPLEMENTACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Al aplicar el Método de los Elementos Finitos, los tensores simétricos son escritos como arreglos de menor orden, simplificándose las expresiones y la codificación en programas computacionales. El procedimiento para realizar esta conversión se denomina regla de Voigt. Así, las tensiones y las deformaciones se convierten de tensores de segundo orden a matrices columnas (o vectores), y para un problema bidimensional se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \text{ y } \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.11-1)$$

En tanto, los tensores constitutivos de cuarto orden se convierten a matrices de segundo orden de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ ó } \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \xrightarrow{\text{notación de Voigt}} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \text{ ó } \sigma_a = C_{ab} \varepsilon_b \quad (1.11-2)$$

de donde, para problemas bidimensionales, se tiene:

$$[\mathbf{C}] \equiv \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (1.11-3)$$

Si el tensor \mathbf{C} posee simetría mayor (1.9-8), la matriz $[\mathbf{C}]$ resulta simétrica. La notación de Voigt, también llamada notación matricial, utiliza los corchetes $\{\}$ y las llaves $[\]$ para identificar vectores y matrices respectivamente.

El producto ${}^t \delta \mathbf{L} : {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D}$, que forma parte del primer miembro de la (1.10-11), puede ser reemplazado por ${}^t \delta \mathbf{D} : {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D}$, debido a la simetría menor (1.9-9) del tensor \mathbf{C}^τ . Luego, discretizando el cuerpo continuo en elementos finitos, utilizando la notación de Voigt, y teniendo en cuenta (1.6-10), la (1.10-11) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \{\delta \dot{\mathbf{u}}\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \mathbf{B}^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] \cdot \mathbf{B} \frac{d\varphi(B)}{J} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\} + \{\delta \dot{\mathbf{u}}\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \boldsymbol{\beta}^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\varphi(B) \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\} = \\ & = \{\delta \dot{\mathbf{u}}\}^T \cdot \int_{{}^t \varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\dot{\mathbf{b}}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \{\delta \dot{\mathbf{u}}\}^T \cdot \int_{\partial^t \varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\dot{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial \varphi(B) \end{aligned} \quad (1.11-4)$$

siendo, para problemas bidimensionales:

$\{\dot{\mathbf{u}}\}$: vector velocidad de desplazamiento nodal,

$$\{\dot{\mathbf{u}}\}^T = \{\dot{u}_1^1 \quad \dot{u}_2^1 \quad \dot{u}_1^2 \quad \dot{u}_2^2 \quad \dots \quad \dot{u}_1^n \quad \dot{u}_2^n\} \quad (1.11-5)$$

n = número de nodos del elemento finito.

\mathbf{N} : funciones de interpolación del elemento finito utilizado,

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = \mathbf{N} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \end{Bmatrix} \quad (1.11-6)$$

\mathbf{B} : relación tasa de deformación – velocidad nodal,

$$\{\mathbf{D}\} = \mathbf{B} \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{2,2} \\ (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & \cdots & N_{n,1} & 0 \\ 0 & N_{1,2} & \cdots & 0 & N_{n,2} \\ N_{1,2} & N_{1,1} & \cdots & N_{n,2} & N_{n,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \end{Bmatrix} \quad (1.11-7)$$

con $\dot{u}_{i,j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ y $N_{i,j} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j}$, ambas medidas sobre la configuración ${}^t\varphi(\mathbf{B})$.

β : relación gradiente espacial de velocidad – velocidad nodal, definida en esta Tesis como

$$\{\mathbf{L}\} = \beta \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{1,1} \\ \dot{u}_{1,2} \\ \dot{u}_{2,1} \\ \dot{u}_{2,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & \cdots & N_{n,1} & 0 \\ N_{1,2} & 0 & \cdots & N_{n,2} & 0 \\ 0 & N_{1,1} & \cdots & 0 & N_{n,1} \\ 0 & N_{1,2} & \cdots & 0 & N_{n,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^1 \\ \dot{u}_2^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_1^n \\ \dot{u}_2^n \end{Bmatrix} \quad (1.11-8)$$

Nótese que, por sobreentenderse su forma y para simplificar la escritura, en algunas de las magnitudes no se colocan los corchetes o llaves de la notación de Voigt. La distribución de los elementos de la matriz $[\mathbf{C}^\tau]$, correspondiente a la relación constitutiva $\{L_v, \tau\} = [\mathbf{C}^\tau] \cdot \{\mathbf{D}\}$, es similar a la de (1.11-3):

$$[{}^t\mathbf{C}^\tau] \equiv \begin{bmatrix} {}^tC_{1111}^\tau & {}^tC_{1122}^\tau & {}^tC_{1112}^\tau \\ {}^tC_{2211}^\tau & {}^tC_{2222}^\tau & {}^tC_{2212}^\tau \\ {}^tC_{1211}^\tau & {}^tC_{1222}^\tau & {}^tC_{1212}^\tau \end{bmatrix} \quad (1.11-9)$$

El cálculo del tensor \mathbf{C}^τ se muestra en detalle mas adelante, en (1.13-13) y (1.15-11). Por otro lado, el arreglo de la matriz $[{}^t\boldsymbol{\sigma}]$ es obtenido considerando la igualdad que se debe mantener entre el producto tensorial y el producto matricial:

$${}^t\delta\mathbf{L} : {}^t\mathbf{L} \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma} = \{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T \cdot \beta^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \cdot \beta \cdot \{\dot{\mathbf{u}}\} \Rightarrow [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \equiv \begin{bmatrix} {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{21} & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{21} \\ 0 & 0 & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (1.11-10)$$

Para buscar la solución paso a paso del problema no lineal, con pasos discretos de tiempo Δt , se requiere que la (1.11-4) esté expresada en forma incremental. En consecuencia, es necesario transformar los diferenciales de tiempo (o tasas) a diferencias finitas:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cong \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (1.11-11)$$

De acuerdo a lo discutido en la sección 1.2, todas las magnitudes se definen sobre la última configuración equilibrada (tiempo t), y se pasa a la siguiente (tiempo $t+\Delta t$) mediante un proceso iterativo, como el de Newton-Raphson Modificado. Por lo tanto, se linealiza el problema considerando que tanto las variables en tasas como sus incrementos están referenciados sobre la configuración del tiempo t , es decir, se utilizan las mismas matrices β de (1.11-8) y \mathbf{B} de (1.11-7), medidas en el tiempo t , para el cálculo incremental. La matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, que surge de la linealización del primer miembro de la (1.11-4), se denomina matriz de rigidez tangente.

Simplificando $\{\delta \dot{\mathbf{u}}\}^T$ de la (1.11-4), y pasando a la forma incremental, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{{}^t\varphi(B)} \mathbf{B}^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^\varepsilon] \cdot \mathbf{B} \frac{d\varphi(B)}{J} + \int_{{}^t\varphi(B)} \beta^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \cdot \beta \cdot d\varphi(B) \right) \cdot \{\Delta \hat{\mathbf{u}}\} = \\ & = \int_{{}^t\varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\Delta \mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial^t\varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\Delta \bar{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial\varphi(B) \end{aligned} \quad (1.11-12)$$

El primer miembro se conoce comúnmente como fuerzas nodales internas, por ser las reacciones internas que equilibran al segundo miembro, conocido como fuerzas nodales externas. Nótese que las fuerzas internas están relacionadas al incremento de los desplazamientos nodales $\Delta \hat{\mathbf{u}}$ a través de dos términos: el primero debido a la respuesta del material, y el segundo debido al estado actual de tensiones, el cual lleva en cuenta todos los efectos geométricos de la deformación, como rotaciones y elongaciones. En consecuencia, a estos términos se los denomina rigidez de material \mathbf{K}_{mat} y rigidez geométrica \mathbf{K}_{geo} , respectivamente, y la suma de ambas forma la matriz de rigidez tangente del sistema de elementos finitos. En forma matricial compacta se puede escribir la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}}) \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.11-13)$$

siendo:

$$\mathbf{K}_{\text{mat}} = \int_{{}^t\varphi(B)} \mathbf{B}^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^\varepsilon] \cdot \mathbf{B} \frac{d\varphi(B)}{J} \quad (1.11-14)$$

$$\mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{{}^t\varphi(B)} \beta^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \cdot \beta \cdot d\varphi(B) \quad (1.11-15)$$

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{{}^t\varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\Delta \mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial^t\varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{\Delta \bar{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial\varphi(B) \quad (1.11-16)$$

La solución de la (1.11-13), que da los desplazamientos nodales $\Delta \hat{\mathbf{u}}$, se calcula con cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, luego de imponer las condiciones de borde (o de contorno) al sistema de elementos finitos, y en cada iteración del proceso incremental. Debido a que el problema es no lineal, y de acuerdo a lo discutido en la sección 1.2, al final de cada iteración o ciclo de cálculo aparece un error o residuo \mathfrak{R} que, según la (1.2-1) y para un proceso incremental, vale:

$$\mathfrak{R} = \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - \Delta \mathbf{F}_{\text{int}} \neq \mathbf{0} \quad (1.11-17)$$

Llevando en cuenta la (1.11-4), se obtiene la expresión para el cálculo del residuo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - (\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}}) \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ &= \Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} - \left(\int_{\varphi(\mathcal{B})} \mathbf{B}^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] \cdot \Delta \hat{\mathbf{e}} \frac{d\varphi(\mathcal{B})}{J} + \int_{\varphi(\mathcal{B})} \boldsymbol{\beta}^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] \cdot \nabla \Delta \hat{\mathbf{u}} \cdot d\varphi(\mathcal{B}) \right) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.11-18)$$

donde $\Delta \hat{\mathbf{e}}$ es el incremento de deformación lineal nodal, en la configuración actual, definido a partir de (1.4-27) y (1.11-7) como:

$$\Delta \hat{\mathbf{e}} = {}^t \mathbf{B} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{e}_1 \\ \Delta \hat{e}_2 \\ \Delta \hat{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{e}_{11} \\ \Delta \hat{e}_{22} \\ 2\Delta \hat{e}_{12} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta \hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \hat{u}_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_j}{\partial {}^t x_i} \right) \quad (1.11-19)$$

y $\nabla \Delta \hat{\mathbf{u}}$ es el gradiente espacial del incremento de los desplazamientos nodales, definido a partir de (1.4-25) y (1.11-8) como:

$$\nabla \Delta \hat{\mathbf{u}} = {}^t \boldsymbol{\beta} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \nabla \Delta \hat{u}_1 \\ \nabla \Delta \hat{u}_2 \\ \nabla \Delta \hat{u}_3 \\ \nabla \Delta \hat{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u}_{1,1} \\ \Delta \hat{u}_{1,2} \\ \Delta \hat{u}_{2,1} \\ \Delta \hat{u}_{2,2} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta \hat{u}_{i,j} = \frac{\partial \Delta \hat{u}_i}{\partial {}^t x_j} \quad (1.11-20)$$

El cálculo del residuo \mathfrak{R} con la (1.11-18) puede introducir, en algunos casos, errores numéricos por redondeo, que se acumulan hacia adelante al avanzar en el tiempo con los incrementos de carga. Para evitar estos errores y lograr un mejor control en el cálculo de la tensión total en el tiempo $t+\Delta t$, se puede calcular el vector residuo como la diferencia que surge de plantear el equilibrio del cuerpo en un instante determinado $t+\Delta t$, con el total de los esfuerzos actuantes en ese momento, es decir:

$$\mathfrak{R} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - \int_{\varphi(\mathcal{B})} \mathbf{B}^T \cdot \{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}\} \cdot d\varphi(\mathcal{B}) \neq \mathbf{0} \quad (1.11-21)$$

Esta expresión también puede ser obtenida a partir de la ecuación de equilibrio (1.10-3). Procediendo de manera similar a lo realizado entre (1.10-5) y (1.10-7):

$$\begin{aligned}
& \int_B \text{DIV } {}^t \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \cdot d\mathbf{B} + \int_B \rho_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \cdot d\mathbf{B} = \\
& = \int_{\partial B} {}^t \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \cdot d\partial B - \int_B {}^t \mathbf{P} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot d\mathbf{B} + \int_B \rho_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\eta}_0 \cdot d\mathbf{B} = 0
\end{aligned} \quad (1.11-22)$$

Recordando (1.6-7), (1.6-10) y (1.5-5), se puede escribir:

$$\begin{aligned}
{}^t \mathbf{P} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 &= {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \mathbf{S} : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \\
&= {}^t \mathbf{F} \cdot {}^t \mathbf{S} \cdot {}^t \mathbf{F}^T : \text{GRAD} \boldsymbol{\eta}_0 \cdot {}^t \mathbf{F}^{-1} \\
&= {}^t \boldsymbol{\tau} : {}^t \nabla \boldsymbol{\eta}
\end{aligned} \quad (1.11-23)$$

Transformando la (1.11-22) a magnitudes espaciales, análogamente a lo hecho entre (1.10-9) y (1.10-11), e incorporando (1.11-23), se obtiene:

$$\int_{{}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : {}^t \boldsymbol{\tau} \frac{d\varphi(B)}{J} = \int_{{}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial {}^t \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} \cdot d\partial \varphi(B) \quad (1.11-24)$$

Considerando la simetría de $\boldsymbol{\tau}$, con $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, se puede escribir: $J^{-1} \delta \mathbf{L} : \boldsymbol{\tau} = \delta \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}$. Y discretizando con elementos finitos, como se hizo al inicio de esta sección, la (1.11-24) resulta:

$$\int_{{}^t \varphi(B)} \mathbf{B}^T \cdot \{ {}^t \boldsymbol{\sigma} \} \cdot d\varphi(B) = {}^t \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1.11-25)$$

siendo:

$${}^t \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{{}^t \varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{ {}^t \mathbf{b} \} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial {}^t \varphi(B)} \mathbf{N}^T \cdot \{ {}^t \bar{\mathbf{t}} \} \cdot d\partial \varphi(B) \quad (1.11-26)$$

La igualdad (1.11-25) es válida cuando todas las magnitudes están medidas sobre una configuración equilibrada, genéricamente en el tiempo t . Al avanzar al tiempo $t+\Delta t$, debido a la no linealidad del problema, la igualdad anterior no se cumple, resultando la (1.11-21). En dicha expresión la magnitud de las variables corresponde al tiempo actual $t+\Delta t$, pero están aplicadas sobre la última configuración equilibrada conocida (tiempo t).

El vector residuo \mathfrak{R} , calculado con (1.11-18) o (1.11-21), es tenido en cuenta como carga para la siguiente iteración de cálculo. El proceso iterativo se detiene, para proceder con el siguiente incremento de tiempo (o carga), siguiendo la técnica de Newton-Raphson mencionada en la sección 1.2, cuando el valor de \mathfrak{R} se hace menor o igual a una cierta tolerancia preestablecida.

1.12 ELASTOPLASTICIDAD.

Los materiales que desarrollan deformaciones totalmente recuperables (deformaciones elásticas) sólo hasta un cierto nivel de tensiones o límite elástico, y deformaciones irreversibles (deformaciones plásticas) mas allá de este límite, se denominan materiales elastoplásticos. Estos materiales también son clasificados como tasa independientes (o tiempo independientes) porque la respuesta del material no depende de la tasa de deformación, es decir, de la velocidad con que se aplica la carga, contrastando con los materiales viscoelastoplásticos, típicamente tasa dependientes (o tiempo dependientes), que no serán tratados en este trabajo.

En el campo plástico los materiales elastoplásticos presentan un comportamiento disipativo y camino dependiente, esto es, parte de la energía de deformación es irreversiblemente transformada a otras formas de energía, como calor, generándose deformaciones plásticas irreversibles cuya magnitud habrá que conocer antes de calcular las tensiones. En consecuencia, al depender las tensiones de la historia completa de la deformación, no pueden calcularse con una simple función de la deformación actual. En estos casos sólo pueden establecerse relaciones entre tasas de tensiones y de deformaciones, adoptándose, como fuera señalado en las secciones 1.2 y 1.3, procesos incrementales de solución con formulaciones Lagrangianas actualizadas.

La inclusión del análisis de la no linealidad geométrica permite la representación de los grandes desplazamientos, rotaciones y elongaciones que sufre el material a lo largo del proceso de carga, pero requiere del uso de magnitudes y relaciones constitutivas objetivas, de acuerdo a lo visto en la sección 1.8. Además, estas leyes constitutivas pueden ser hiperelásticas o hipoeelásticas, según deriven o no de un funcional de energía almacenada (ver sección 1.9). En consecuencia, los modelos de plasticidad se denominan hiperelastoplásticos o hipoeelastoplásticos, según la respuesta del material en el campo elástico siga una ley hiperelástica o hipoeelástica, respectivamente. En ambos casos, la formulación del campo plástico se desarrolla de manera análoga a la plasticidad infinitesimal (o de pequeñas deformaciones), es decir, se utiliza la teoría clásica de plasticidad (ver Zienkiewicz – Taylor 1991, vol. 2, pag. 228 a 239), cuyos principales elementos son:

- a) Descomposición de la deformación, en una parte reversible elástica y otra irreversible plástica, que define la relación incremental tensión – deformación elastoplásticas.
- b) Una superficie de fluencia que determina el límite elástico, a partir del cual se producen las deformaciones plásticas.

- c) Un criterio de carga que define cuando existe carga en el sentido de la plasticidad.
- d) Una regla de flujo (o de fluencia) que gobierna el flujo plástico, es decir, determina el vector de deformaciones plásticas.
- e) Una regla de endurecimiento que gobierna las variables internas que definen la evolución de la superficie de fluencia.

1.13 MODELO HIPOELASTOPLASTICO.

Las descripciones hipoelásticas de la respuesta del material son adecuadas, en general, cuando las deformaciones elásticas son pequeñas comparadas con las deformaciones plásticas. En efecto, como se viera en la sección 1.9, la energía no es conservada en un ciclo cerrado de deformación elástica para materiales hipoelásticos, pero si las deformaciones elásticas son pequeñas el error en la energía es muy pequeño, es decir, el trabajo remanente de un ciclo cerrado de deformación no es significativo.

Hacia el final de la sección 1.9 se señaló que en la elección de la ecuación constitutiva hipoelástica, que gobernará la respuesta del material, se tienen en cuenta distintos requerimientos. Uno de estos requerimientos es la independencia de las constantes del material respecto del sistema coordenado cartesiano adoptado como referencia. Considerando una relación como la (1.9-13), $\boldsymbol{\tau}^\nabla = \mathbf{C}^{\tau^\nabla} : \mathbf{D}$, la indiferencia referencial del material requiere que:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla+} = \mathbf{C}^{\tau^\nabla} : \mathbf{D}^+ \quad (1.13-1)$$

Recordando la transformación objetiva de los tensores de segundo orden (1.7-4), se puede escribir:

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}^\nabla \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{C}^{\tau^\nabla} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \text{ ó } Q_{im} Q_{jn} \tau_{mn}^\nabla = C_{ijkl}^{\tau^\nabla} Q_{kp} Q_{lq} D_{pq} \quad (1.13-2)$$

y reordenando se tiene:

$$\tau_{mn}^\nabla = (Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} C_{ijkl}^{\tau^\nabla}) D_{pq} \quad (1.13-3)$$

Pero la relación constitutiva es $\boldsymbol{\tau}^\nabla = \mathbf{C}^{\tau^\nabla} : \mathbf{D}$, por lo tanto debe cumplirse:

$$C_{mnpq}^{\tau^\nabla} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} C_{ijkl}^{\tau^\nabla}, \quad \forall Q_{ij} \quad (1.13-4)$$

condición que se satisface sólo para materiales isotrópicos. Para eliminar esta restricción, se elige la relación constitutiva (1.8-16), $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\mathbf{C}}^\tau : \overline{\mathbf{D}}$, en términos de los tensores tasa de la ten-

sión corrotada de Kirchhoff y tasa de deformación corrotada, insensibles a rotaciones de cuerpo rígido, es decir, $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^+ \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\bar{\mathbf{D}}^+ \equiv \bar{\mathbf{D}}$. En consecuencia:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^+ = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}}^+ \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}} \quad (1.13-5)$$

cumpléndose la condición (1.13-1) para toda rotación rígida, no imponiendo restricciones a este tensor constitutivo, esto es, $\bar{\mathbf{C}}^\tau$ puede ser anisotrópico.

Si el material fuera isotrópico, resulta:

$$\bar{C}_{ijkl}^\tau = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.13-6)$$

siendo δ_{ij} el delta de Kronecker (1.4-10), y:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ y } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.13-7)$$

las constantes de Lamé en función del módulo Young E y del coeficiente de Poisson ν .

Otro de los requerimientos a tener en cuenta en la elección de la ecuación constitutiva hipolástica es la simetría de la matriz de rigidez tangente de los elementos finitos, necesaria para acelerar la solución del sistema de ecuaciones (1.11-13) y reducir la demanda de almacenamiento en memoria en el cálculo computacional. Esta simetría, como puede observarse en las (1.11-14) y (1.11-15), se cumple si las matrices $[{}^t \boldsymbol{\sigma}]$ y $[\mathbf{C}^\tau]$ son simétricas. De acuerdo a (1.11-10), la matriz $[{}^t \boldsymbol{\sigma}]$ es simétrica por ser simétrico el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, y de acuerdo a (1.11-9), la matriz $[\mathbf{C}^\tau]$ será simétrica si el tensor constitutivo C_{ijkl}^τ posee simetría mayor. Recordando (1.8-17), (1.8-9) y (1.4-15), se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} &= \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Omega}^T) \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T [\dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{W}^T + (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T [L_\nu \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{D} + (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T [(\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D}] \mathbf{R} \end{aligned} \quad (1.13-8)$$

donde:

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} + \delta_{jk} \tau_{il} + \delta_{jl} \tau_{ik}) \quad (1.13-9)$$

y

$$\mathbf{C}'' : \mathbf{D} = (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \quad (1.13-10)$$

Recordando la primer igualdad de (1.4-23), en la (1.13-8), se tiene:

$$\mathbf{R} (\bar{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}) \mathbf{R}^T = (\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D} \quad (1.13-11)$$

o en notación indicial:

$$R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}_{mnpq}^{\tau}D_{kl} = (C_{ijkl}^{\tau} + C'_{ijkl} + C''_{ijkl})D_{kl} \quad (1.13-12)$$

de donde se despeja:

$$\mathbf{C}^{\tau} = \mathbf{R}\mathbf{R}\bar{\mathbf{C}}^{\tau}\mathbf{R}^T\mathbf{R}^T - \mathbf{C}' - \mathbf{C}'', \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}_{mnpq}^{\tau} - C'_{ijkl} - C''_{ijkl} \quad (1.13-13)$$

Los tensores $\bar{\mathbf{C}}^{\tau}$ y \mathbf{C}' poseen simetría menor y mayor, pero el tensor \mathbf{C}'' no posee simetría mayor (ver Simo – Hughes 1998, pag. 273), tornando no simétrico al tensor \mathbf{C}^{τ} , en consecuencia, la matriz de rigidez material tangente (1.11-14) resulta no simétrica. Por lo tanto, para conservar la simetría de la matriz de rigidez tangente debería eliminarse el tensor \mathbf{C}'' , es decir, se debería considerar que $\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}$, resultando, a partir de la primer igualdad de (1.13-8), que:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau}^{\nabla J} \mathbf{R} \quad (1.13-14)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$ es la tasa de Jaumann de la tensión de Kirchhoff definida en (1.8-6). La suposición simplificativa de considerar $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$ aparentemente no provoca errores apreciables cuando las tensiones internas del cuerpo se mantienen con valores cuyos órdenes de magnitud son menores respecto a los valores establecidos por las constantes del material, o también, cuando las tensiones de corte, definidas según el sistema cartesiano elegido como referencia, son muy reducidas respecto de las tensiones normales. La justificación de esta afirmación puede ser vista en la sección 1.14.

Aceptando la simplificación mencionada, $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$, y considerando el caso particular de materiales isotrópicos, la (1.13-13) puede ser escrita, en notación matricial o de Voigt, como:

$$[\mathbf{C}^{\tau}] = [\bar{\mathbf{C}}^{\tau}] - [\mathbf{C}'] \quad (1.13-15)$$

donde la matriz $[\mathbf{C}']$ para problemas bidimensionales, según (1.13-9) y (1.11-3), resulta:

$$[\mathbf{C}'] \equiv \begin{bmatrix} 2\tau_{11} & 0 & \tau_{12} \\ 0 & 2\tau_{22} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{12} & \frac{1}{2}(\tau_{11} + \tau_{22}) \end{bmatrix}, \text{ con } \tau_{12} = \tau_{21} \quad (1.13-16)$$

En los modelos hipoplastásticos, el tensor velocidad de deformación es típicamente descompuesto aditivamente en partes elástica y plástica:

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{D}}^E + \bar{\mathbf{D}}^P \quad (1.13-17)$$

La parte elástica es la que se relaciona, a través de la ecuación constitutiva (1.13-5), con la tasa corrotada de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}}^E = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : (\bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{D}}^P) \quad (1.13-18)$$

Mientras que la parte plástica queda definida por la regla de flujo plástico como:

$$\bar{\mathbf{D}}^P = \dot{\Lambda} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (1.13-19)$$

donde $\dot{\Lambda}$ es la tasa del multiplicador plástico, $\bar{\mathbf{k}}$ es el conjunto de variables internas, ligadas al endurecimiento, que gobiernan la evolución de la superficie de fluencia $\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$, y $\bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$ es la dirección del flujo plástico:

$$\bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = \frac{\partial \bar{Q}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.13-20)$$

siendo $\bar{Q}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})$ un potencial plástico que define el incremento de deformaciones plásticas. Estas deformaciones plásticas se producen sólo si las tensiones $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ satisfacen el criterio de plasticificación, es decir, si alcanzan el límite elástico o superficie de fluencia: $\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = 0$. El caso particular de $\bar{Q} \equiv \bar{F}$ es conocido como plasticidad asociada, y es el abordado en este trabajo. Por lo tanto, la (1.13-19), expresada en forma diferencial y recordando la última equivalencia de (1.4-23), resulta:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = d\Lambda \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.13-21)$$

El resto de las ecuaciones de plasticidad, incluidas las deducciones del parámetro plástico $d\Lambda$ y de la matriz constitutiva elastoplástica $\bar{\mathbf{C}}_{EP}^{\boldsymbol{\tau}}$ se desarrollan de manera totalmente análoga al caso de plasticidad infinitesimal (linealidad geométrica), pero en términos de las tensiones corrotadas $\bar{\boldsymbol{\tau}}$. Además estos desarrollos son comunes a los de los modelos hiperelastoplásticos. Por lo tanto, fueron agrupados en la sección 1.16.

1.14 INFLUENCIA DE LA ASIMETRÍA EN EL TENSOR CONSTITUTIVO $\mathbf{C}^{\boldsymbol{\tau}}$.

Con el objeto de realizar algún aporte a la bibliografía especializada en Mecánica No Lineal de los Medios Continuos, y tratando de ampliar lo ya publicado por Simo – Hughes (1998, pag. 273), en este trabajo de Tesis se realiza también el análisis teórico de la influencia de la parte asimétrica del tensor constitutivo $\mathbf{C}^{\boldsymbol{\tau}}$. A continuación se estudia en cuales casos este tensor $\mathbf{C}^{\boldsymbol{\tau}}$ puede ser supuesto simétrico, y en cuales otros casos no es posible realizar tal suposición.

La tasa de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, calculada en (1.13-8), también puede ser expresada como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} &= \mathbf{R}^T (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^T) \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^T [L_v \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R}\end{aligned}\quad (1.14-1)$$

Considerando además la antisimetría de $\boldsymbol{\Omega}$, se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \quad (1.14-2)$$

Reemplazando esta expresión en las relaciones constitutivas: $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}}$ y $L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau : \mathbf{D}$, y luego en la (1.14-1), se tiene:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] \mathbf{R} &= \\ = \mathbf{R}^T \left\{ \mathbf{C}^\tau : \frac{1}{2}[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T] + \mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) \right\} \mathbf{R}\end{aligned}\quad (1.14-3)$$

donde:

$$\mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T, \text{ ó } C'''_{ijkl} = \delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} \quad (1.14-4)$$

Teniendo presente que $\bar{\mathbf{C}}^\tau$ posee simetría menor, se tiene: $\bar{C}^\tau_{mnpq} = \frac{1}{2}(\bar{C}^\tau_{mnpq} + \bar{C}^\tau_{mnpq})$. Por lo tanto se puede despejar en notación indicial:

$$\hat{C}^\tau_{ijkl} = \frac{1}{2}(C^\tau_{ijkl} + C^\tau_{ijlk}) = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}^\tau_{mnpq} - C'''_{ijkl} \quad (1.14-5)$$

Este tensor, con simetría menor: $\hat{C}^\tau_{ijkl} = \hat{C}^\tau_{ijlk}$, puede ser utilizado en lugar de C^τ_{ijkl} para el cálculo del primer miembro de la (1.10-11), puesto que, como puede apreciarse en dicha expresión, se lo multiplica por la velocidad de deformación D_{kl} , simétrica.

El tensor $\bar{\mathbf{C}}^\tau$, como generalmente se hace en los modelos hipelásticos, es asumido con simetría mayor. Sin embargo, el tensor \mathbf{C}''' no posee simetría mayor: $C'''_{ijkl} \neq C'''_{klij}$, tornando no simétrico a $\hat{\mathbf{C}}^\tau$ y consecuentemente a la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos. Separando \mathbf{C}''' en una parte simétrica $\mathbf{C}^{\text{sim}} \equiv \mathbf{C}'$ y otra asimétrica \mathbf{C}^{asim} , se obtiene:

$$C'''_{ijkl} = C^{\text{sim}}_{ijkl} + C^{\text{asim}}_{ijkl} \quad (1.14-6)$$

donde:

$$C^{\text{sim}}_{ijkl} \equiv C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} + \delta_{jk} \tau_{il} + \delta_{jl} \tau_{ik}), \quad C'_{ijkl} = C'_{jikl} = C'_{ijlk} = C'_{klij} \quad (1.14-7)$$

posee simetría mayor y menor, y:

$$C_{ijkl}^{\text{asim}} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} - \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} - \delta_{jl}\tau_{ik}), \quad C_{ijkl}^{\text{asim}} = C_{jikl}^{\text{asim}} = -C_{ijlk}^{\text{asim}} \quad \text{y} \quad C_{ijkl}^{\text{asim}} \neq C_{klij}^{\text{asim}} \quad (1.14-8)$$

no posee simetría mayor.

Como se desprende de las expresiones (1.14-5), (1.14-6) y (1.14-8), para mantener la simetría mayor de C^τ (y de la matriz de rigidez de los elementos finitos), se puede eliminar el término C^{asim} , en general cuando las tensiones internas τ_{ij} del cuerpo son de un orden de magnitud menor respecto a las constantes del material, es decir: $C^{\text{asim}} \ll \bar{C}^\tau$, y en particular cuando las tensiones tangenciales τ_{ij} (con $i \neq j$) y $\frac{1}{2}(\tau_{ii} - \tau_{jj})$ son de valor despreciable, resultando: $C^{\text{asim}} \cong \mathbf{0}$. Por lo tanto, en estos casos se podrá calcular C^τ de (1.10-11) y (1.11-14), sin generar errores significativos, utilizando la expresión:

$$C_{ijkl}^\tau = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}_{mnpq}^\tau - C'_{ijkl} \quad (1.14-9)$$

Por supuesto, en los demás casos, en que C^{asim} posea un valor no despreciable, el tensor C^τ se tiene que calcular con (1.13-13) o (1.14-5), debiendo resolverse necesariamente sistemas no simétricos de ecuaciones de elementos finitos.

1.15 MODELO HIPERELASTOPLASTICO.

El modelo descrito en la sección 1.13, basado en una relación constitutiva hipoelástica, está sujeto a una serie de críticas, a saber:

- El trabajo realizado en un ciclo cerrado de deformación elástica no es exactamente igual a cero.
- Se requiere de ecuaciones constitutivas incrementalmente objetivas para asegurar que las rotaciones finitas no induzcan errores inaceptables en las tensiones.
- Además, si el modelo hipoelástico no fuera formulado en términos de magnitudes corrotadas, sólo se podrían representar materiales isotrópicos.

Los modelos constitutivos hiperelastoplásticos son desarrollados para eliminar los inconvenientes mencionados. Como se señalara en la sección 1.9, la respuesta elástica en estos modelos deriva de un funcional de energía almacenada, por lo tanto, el trabajo realizado en un camino cerrado de deformación elástica es exactamente nulo, y no es necesaria la integración de tasas objetivas de tensiones para computar la tensión en el tiempo actual. Además, en las

formulaciones hiperelastoplásticas se describe de manera natural la indiferencia referencial de las constantes del material.

Dos conceptos claves distinguen los materiales hiperelastoplásticos de los hipoeelastoplásticos:

- Una descomposición multiplicativa de la deformación en partes elástica y plástica:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^E \mathbf{F}^P \quad (1.15-1)$$

donde \mathbf{F}^E y \mathbf{F}^P son las partes elástica y plástica, respectivamente, del gradiente de deformación \mathbf{F} .

- El cálculo de las tensiones en función de las deformaciones elásticas a través de un funcional de energía almacenada:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \bar{w}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^E)}{\partial \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^E} \quad (1.15-2)$$

donde $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^E$ es la parte elástica de la deformación logarítmica simétrica (1.4-24).

La descomposición (1.15-1) del gradiente de deformación puede ser interpretada conceptualmente, por aplicación de la regla de diferenciación en cadena y de manera análoga a (1.4-6), como una deformación total fraccionada en dos etapas, la primera una plástica y luego otra elástica:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.15-3)$$

donde \mathbf{x}^* pertenece a una configuración ficticia intermedia, correspondiente al tiempo ficticio t^* intermedio: $0 < t^* < t + \Delta t$, en la que se produjeron todas las deformaciones plásticas pero ninguna elástica. Esta hipotética configuración intermedia relajada es obtenida descargando el material de la configuración actual a un estado de tensión cero, en el cual no existen procesos elásticos. Por lo tanto, la parte plástica \mathbf{F}^P del gradiente de deformación corresponde a la deformación desde la configuración inicial (tiempo 0) hasta esta configuración ficticia relajada (tiempo t^*), mientras que la parte elástica \mathbf{F}^E , las rotaciones de cuerpo rígido, y por supuesto las tensiones, son medidas desde la configuración relajada hasta la configuración actual (tiempo $t + \Delta t$). Sin embargo, no debe perderse de vista que esto es solo un artificio que facilita la comprensión de un fenómeno que en realidad es simultáneo. Aplicando la descomposición polar (1.4-5) a (1.15-1), se tiene:

$$\mathbf{F}^E = \mathbf{R}^E \mathbf{U}^E \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{R}^E \mathbf{U}^E \mathbf{F}^P \quad (1.15-4)$$

donde $\mathbf{F}^P \equiv \mathbf{U}^P$ asumiendo que no existen rotaciones plásticas.

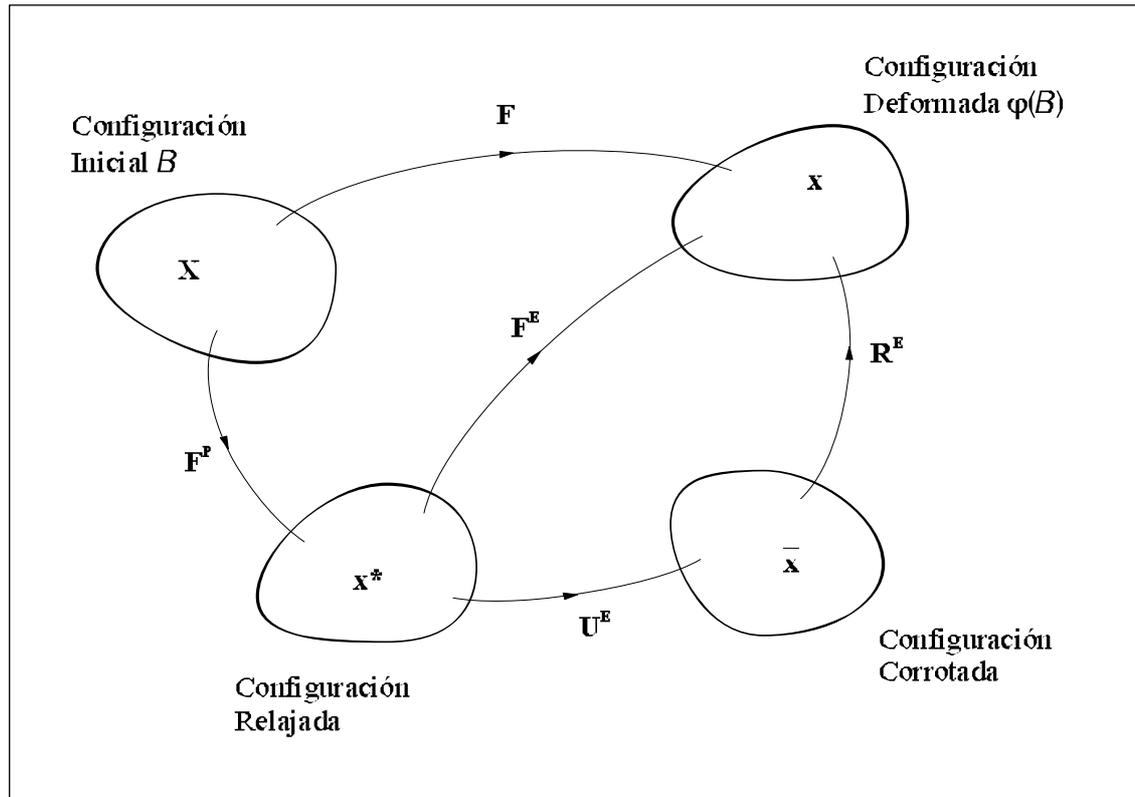


Figura 1-V: Descomposición del gradiente de deformación y definición de las distintas configuraciones geométricas.

Como puede verse en la Figura 1-V, la descomposición del gradiente de deformación define varias configuraciones geométricas. En la configuración corrotada se mide la tensión corrotacional de Kirchhoff (1.6-11), que para materiales hiperelastoplásticos queda definida como:

$$\bar{\tau} = (\mathbf{R}^E)^T \cdot \tau \cdot \mathbf{R}^E = J(\mathbf{R}^E)^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}^E \quad (1.15-5)$$

La respuesta elástica se calcula con (1.15-2) a partir de un funcional hiperelástico \bar{w} , expresado en términos de magnitudes corrotadas, dado, análogamente a (1.9-3), por:

$$\bar{w} = \int \bar{\tau}_{ij} d\bar{\epsilon}_{ij}^E = \frac{1}{2} \bar{C}_{ijkl}^{\tau} \bar{\epsilon}_{ij}^E \bar{\epsilon}_{kl}^E, \text{ ó } \bar{w} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^E : \bar{C}^{\tau} : \bar{\epsilon}^E \quad (1.15-6)$$

siendo \bar{C}^{τ} el tensor constitutivo elástico constante que contiene las características del material y que relaciona:

$$\bar{\tau} = \bar{C}^{\tau} : \bar{\epsilon}^E, \text{ ó } \bar{\tau}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^{\tau} \bar{\epsilon}_{kl}^E \quad (1.15-7)$$

Derivando esta expresión en el tiempo, se obtiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E)}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^E = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^E = \bar{\mathbf{C}}^\tau : \bar{\mathbf{D}}^E \quad (1.15-8)$$

donde $\bar{\mathbf{D}}^E \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^E$ es la parte elástica de la tasa de deformación corrotada (1.4-23), calculada mas adelante en (1.15-18), y siendo:

$$\bar{\mathbf{C}}^\tau = \frac{\partial^2 \bar{w}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E)}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E}, \text{ ó } \bar{C}_{ijkl}^\tau = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{\varepsilon}_{ij}^E \partial \bar{\varepsilon}_{kl}^E} \quad (1.15-9)$$

cuya expresión para materiales isotrópicos resulta:

$$\bar{C}_{ijkl}^\tau = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.15-10)$$

con μ y λ las constantes de Lamé definidas en (1.13-7). La evaluación del tensor constitutivo \mathbf{C}^τ , utilizado en el cálculo de la matriz de rigidez material (1.11-14), se realiza con la expresión (1.13-13), o de acuerdo a lo discutido debajo de dicha expresión, para mantener la simetría de la matriz de rigidez tangente, se puede despreciar el tensor \mathbf{C}'' , resultando:

$$\mathbf{C}^\tau = \mathbf{R}^E \mathbf{R}^E \bar{\mathbf{C}}^\tau (\mathbf{R}^E)^T (\mathbf{R}^E)^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C_{ijkl}^\tau = R_{im}^E R_{jn}^E R_{kp}^E R_{lq}^E \bar{C}_{mnpq}^\tau - C'_{ijkl} \quad (1.15-11)$$

con \mathbf{C}' definido en (1.13-9). Y para el caso particular de materiales isotrópicos, se puede escribir en notación matricial o de Voigt:

$$[\mathbf{C}^\tau] = [\bar{\mathbf{C}}^\tau] - [\mathbf{C}'] \quad (1.15-12)$$

estando la matriz $[\mathbf{C}']$ definida para problemas bidimensionales según (1.13-16).

El gradiente espacial de velocidad, de acuerdo a (1.4-13) y (1.15-1), puede descomponerse aditivamente en sus partes elástica y plástica:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} &= (\dot{\mathbf{F}}^E \mathbf{F}^P + \mathbf{F}^E \dot{\mathbf{F}}^P) (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{F}^E)^{-1} \\ &= \dot{\mathbf{F}}^E (\mathbf{F}^E)^{-1} + \mathbf{F}^E \dot{\mathbf{F}}^P (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{F}^E)^{-1} = \mathbf{L}^E + \mathbf{L}^P \end{aligned} \quad (1.15-13)$$

o definido en la configuración corrotada resulta:

$$\bar{\mathbf{L}} = (\mathbf{R}^E)^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^E = \bar{\mathbf{L}}^E + \bar{\mathbf{L}}^P \quad (1.15-14)$$

con:

$$\bar{\mathbf{L}}^E = (\mathbf{R}^E)^T \cdot \mathbf{L}^E \cdot \mathbf{R}^E = (\mathbf{R}^E)^T \cdot \boldsymbol{\Omega}^E \cdot \mathbf{R}^E + \dot{\mathbf{U}}^E \cdot (\mathbf{U}^E)^{-1} \quad (1.15-15)$$

$$\bar{\mathbf{L}}^P = (\mathbf{R}^E)^T \cdot \mathbf{L}^P \cdot \mathbf{R}^E = \mathbf{U}^E \cdot \dot{\mathbf{F}}^P \cdot (\mathbf{F}^P)^{-1} \cdot (\mathbf{U}^E)^{-1} \quad (1.15-16)$$

donde se aplicó la primer igualdad de (1.15-4), y el tensor de giro antisimétrico (1.4-19), $\boldsymbol{\Omega}^E = \dot{\mathbf{R}}^E (\mathbf{R}^E)^T$. Análogamente a (1.4-15), el gradiente espacial de velocidad corrotado $\bar{\mathbf{L}}$ puede desdoblarse en el tensor simétrico tasa de deformación corrotada $\bar{\mathbf{D}}$ y en el tensor anti-

simétrico de giro corrotado $\bar{\mathbf{W}}$, y éstos a su vez pueden descomponerse aditivamente en sus partes elásticas y plásticas:

$$\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{W}} \equiv \bar{\mathbf{L}}^E + \bar{\mathbf{L}}^P = (\bar{\mathbf{D}}^E + \bar{\mathbf{W}}^E) + (\bar{\mathbf{D}}^P + \bar{\mathbf{W}}^P) \quad (1.15-17)$$

siendo:

$$\bar{\mathbf{D}}^E = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^E + (\bar{\mathbf{L}}^E)^T] = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{U}}^E (\mathbf{U}^E)^{-1} + (\mathbf{U}^E)^{-1} \dot{\mathbf{U}}^E] \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^E \quad (1.15-18)$$

$$\bar{\mathbf{W}}^E = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^E - (\bar{\mathbf{L}}^E)^T] = (\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\Omega}^E \mathbf{R}^E + \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{U}}^E (\mathbf{U}^E)^{-1} - (\mathbf{U}^E)^{-1} \dot{\mathbf{U}}^E] \quad (1.15-19)$$

$$\bar{\mathbf{D}}^P = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^P + (\bar{\mathbf{L}}^P)^T] = \frac{1}{2} [\mathbf{U}^E \dot{\mathbf{F}}^P (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{U}^E)^{-1} + (\mathbf{U}^E)^{-1} (\mathbf{F}^P)^{-1} \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{U}^E] \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^P \quad (1.15-20)$$

$$\bar{\mathbf{W}}^P = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{L}}^P - (\bar{\mathbf{L}}^P)^T] = \frac{1}{2} [\mathbf{U}^E \dot{\mathbf{F}}^P (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{U}^E)^{-1} - (\mathbf{U}^E)^{-1} (\mathbf{F}^P)^{-1} \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{U}^E] \quad (1.15-21)$$

donde se utilizó la simetría tanto de \mathbf{U}^E como de \mathbf{F}^P . Las partes elástica y plástica de la tasa de la deformación logarítmica simétrica $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, aplicadas a las últimas igualdades de (1.15-18) y (1.15-20), respectivamente, pueden ser calculadas recordando (1.4-23) y la segunda expresión de (1.15-4):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}] \\ &= \frac{1}{2} [(\dot{\mathbf{U}}^E \mathbf{F}^P + \mathbf{U}^E \dot{\mathbf{F}}^P) (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{U}^E)^{-1} + (\mathbf{U}^E)^{-1} (\mathbf{F}^P)^{-1} (\dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{U}^E + \mathbf{F}^P \dot{\mathbf{U}}^E)] \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{U}}^E (\mathbf{U}^E)^{-1} + (\mathbf{U}^E)^{-1} \dot{\mathbf{U}}^E] + \frac{1}{2} [\mathbf{U}^E \dot{\mathbf{F}}^P (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{U}^E)^{-1} + (\mathbf{U}^E)^{-1} (\mathbf{F}^P)^{-1} \dot{\mathbf{F}}^P \mathbf{U}^E] \\ &= \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^E + \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^P \end{aligned} \quad (1.15-22)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{D}^E = \frac{1}{2} [\mathbf{L}^E + (\mathbf{L}^E)^T] = \mathbf{R}^E \bar{\mathbf{D}}^E (\mathbf{R}^E)^T, \text{ y } \mathbf{D}^P = \frac{1}{2} [\mathbf{L}^P + (\mathbf{L}^P)^T] = \mathbf{R}^E \bar{\mathbf{D}}^P (\mathbf{R}^E)^T \quad (1.15-23)$$

se verifica fácilmente la relación de potencia mecánica (1.6-9):

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : (\mathbf{D}^E + \mathbf{D}^P) \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : (\bar{\mathbf{D}}^E + \bar{\mathbf{D}}^P) \quad (1.15-24)$$

La regla de flujo plástico puede ser definida como (ver Belytschko – Liu - Moran 2000, pag. 268):

$$\bar{\mathbf{L}}^P = \mathbf{U}^E \dot{\mathbf{F}}^P (\mathbf{F}^P)^{-1} (\mathbf{U}^E)^{-1} = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (1.15-25)$$

donde cada uno de los elementos de la última igualdad tienen el mismo significado que los definidos en (1.13-19). Pero también, manteniendo la analogía con la plasticidad infinitesimal, la regla de flujo plástico en materiales hiperelastoplásticos puede ser expresada como:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^P \equiv \bar{\mathbf{D}}^P = \mathbf{U}^E \cdot \dot{\mathbf{F}}^P \cdot (\mathbf{F}^P)^{-1} \cdot (\mathbf{U}^E)^{-1} = \dot{\Lambda} \cdot \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) \quad (1.15-26)$$

donde se asumió que $\bar{\mathbf{L}}^P$ es simétrico, es decir, de (1.15-20) surge: $\bar{\mathbf{D}}^P = \bar{\mathbf{L}}^P$, y de (1.15-21) resulta: $\bar{\mathbf{W}}^P = \mathbf{0}$ (ver Bathe 1996, pag. 615).

Cualquiera de las definiciones (1.15-25) o (1.15-26) conducen a la misma evaluación del gradiente de deformación plástico \mathbf{F}^P del tiempo actual $t+\Delta t$. Utilizando el mismo razonamiento que en (1.15-3), se puede decir que un incremento de deformación se produce en dos etapas, primera una plástica, desde el tiempo anterior equilibrado t hasta la configuración ficticia relajada del tiempo intermedio t^* (está claro que en este caso: $t < t^* < t+\Delta t$), y luego otra elástica, desde el tiempo t^* hasta el tiempo actual $t+\Delta t$. Planteando entonces la integral en el tiempo de (1.15-25), o (1.15-26), desde t hasta t^* , las deformaciones elásticas se mantienen invariables, en consecuencia:

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{U}^E \cdot \int_t^{t^*} \dot{\mathbf{F}}^P \cdot (\mathbf{F}^P)^{-1} dt \cdot ({}^t \mathbf{U}^E)^{-1} &= {}^t \mathbf{U}^E \cdot \ln \mathbf{F}^P \Big|_t^{t^*} \cdot ({}^t \mathbf{U}^E)^{-1} = {}^t \mathbf{U}^E \cdot \ln \left[{}^{t^*} \mathbf{F}^P \cdot ({}^t \mathbf{F}^P)^{-1} \right] \cdot ({}^t \mathbf{U}^E)^{-1} = \\ &= \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\Lambda} \cdot \bar{\mathbf{a}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) dt \end{aligned} \quad (1.15-27)$$

donde la última integral es calculada como una sumatoria por el algoritmo de retorno de tensiones (ver sección 3.4). Despejando el gradiente de deformación plástico del tiempo actual, se tiene:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^P \equiv {}^{t^*} \mathbf{F}^P = \exp \left[({}^t \mathbf{U}^E)^{-1} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \cdot {}^t \mathbf{U}^E \right] \cdot {}^t \mathbf{F}^P \quad (1.15-28)$$

El cálculo de la función exponencial de esta ecuación requiere de descomposición espectral (ver Bathe 1996, pag. 510 a 512) en cada incremento de tiempo. Para ahorrar el esfuerzo computacional que esto significa, se pasa a la forma incremental la (1.15-25), o (1.15-26), y se despeja directamente el gradiente de deformación plástico del tiempo actual:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^P = \left[\mathbf{I} + ({}^t \mathbf{U}^E)^{-1} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P \cdot {}^t \mathbf{U}^E \right] \cdot {}^t \mathbf{F}^P \quad (1.15-29)$$

Al igual que lo aclarado al final de la sección 1.13, el resto de las ecuaciones de plasticidad en términos de las tensiones corrotadas son comunes a las del modelo hipoelastoplástico, y son desarrolladas en la siguiente sección.

1.16 TEORIA DE PLASTICIDAD EN TERMINOS DE TENSIONES CORROTADAS.

En las secciones precedentes se desarrollaron los modelos constitutivos hipoelastoplástico e hiperelastoplástico, señalando las particularidades de cada caso. A continuación se describen las ecuaciones de plasticidad comunes a ambos modelos, siguiendo el esquema de deducción de la plasticidad clásica infinitesimal (ver Zienkiewicz – Taylor 1991, vol. 2, pag. 228 a 232), con todas las magnitudes medidas sobre la configuración corrotada. Entonces, a partir de (1.13-19) o (1.15-26), el incremento de deformación plástica, asumiendo plasticidad asociada, viene dado por:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = d\Lambda \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.16-1)$$

Y el incremento de deformación elástica, según (1.13-18) o (1.15-8), se puede escribir como:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E = [\bar{\mathbf{C}}^\tau]^{-1} d\bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.16-2)$$

Nótese que en las expresiones anteriores se ha utilizado la notación matricial o de Voigt (1.11-2), eliminando por simplicidad los corchetes de los vectores. El incremento total de la deformación logarítmica simétrica (1.4-24) resulta:

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = [\bar{\mathbf{C}}^\tau]^{-1} d\bar{\boldsymbol{\tau}} + d\Lambda \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.16-3)$$

La condición de plastificación, que determina el nivel de tensiones $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ para el cual se inician las deformaciones plásticas, puede ser escrita en forma genérica como:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = 0 \quad (1.16-4)$$

donde $\bar{\mathbf{k}}$ es el conjunto de variables internas del material que gobiernan el endurecimiento, o evolución de la superficie de fluencia (1.16-4). Sobre esta superficie de fluencia $\bar{F} = 0$ se mantienen las tensiones durante un proceso de carga plástica ($d\Lambda > 0$). Esto también puede ser establecido por la condición de consistencia $d\bar{F} = 0$ que, por la regla de diferenciación en cadena, puede ser escrita como:

$$d\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} d\bar{\boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} d\bar{\mathbf{k}} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} d\bar{\boldsymbol{\tau}} - A d\Lambda = 0 \quad (1.16-5)$$

donde el parámetro A viene dado por:

$$A = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mathbf{k}}} \frac{d\bar{\mathbf{k}}}{d\Lambda} \quad (1.16-6)$$

Luego, a partir de (1.16-3) y (1.16-5), análogamente a la plasticidad infinitesimal, se deduce el incremento del multiplicador plástico:

$$d\Lambda = \frac{\bar{\mathbf{a}}^T [\bar{\mathbf{C}}^\tau]^{-1} d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\bar{\mathbf{a}}^T [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \bar{\mathbf{a}} + A} \quad (1.16-7)$$

donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la dirección del flujo plástico (1.13-20), representado en plasticidad asociada por el vector normal a la superficie de fluencia:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (1.16-8)$$

Para los casos de endurecimiento isotrópico:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - \bar{g}(\bar{\mathbf{k}}) = 0 \quad (1.16-9)$$

donde $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ es una función escalar que determina el nivel de las tensiones $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, y $\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})$ es el límite elástico que depende de un conjunto de variables internas $\bar{\mathbf{k}}$ del material. Resulta en estos casos:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}, \text{ ó } \bar{\mathbf{a}}^T = \left\{ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{11}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{22}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{33}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{23}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{31}}, \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\tau}_{12}} \right\} \quad (1.16-10)$$

La matriz constitutiva elastoplástica, definida por:

$$d\bar{\boldsymbol{\tau}} = [\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau] d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau] (d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^E + d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P) \quad (1.16-11)$$

puede ser deducida a partir de (1.16-3) y (1.16-7), obteniéndose en notación matricial o de Voigt:

$$[\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau] = [\bar{\mathbf{C}}^\tau] - \frac{[\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau]}{\bar{\mathbf{a}}^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \bar{\mathbf{a}} + A} \quad (1.16-12)$$

y en notación tensorial:

$$\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau = \bar{\mathbf{C}}^\tau - \frac{\bar{\mathbf{C}}^\tau \cdot \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^\tau}{\bar{\mathbf{a}}^T \cdot \bar{\mathbf{C}}^\tau \cdot \bar{\mathbf{a}} + A}, \text{ ó } (\bar{\mathbf{C}}_{EP}^\tau)_{ijkl} = \bar{C}_{ijkl}^\tau - \frac{\bar{C}_{ijmn}^\tau \bar{a}_{mn} \bar{a}_{pq} \bar{C}_{pqkl}^\tau}{\bar{a}_{rs} \bar{C}_{rstu}^\tau \bar{a}_{tu} + A} \quad (1.16-13)$$

Una función escalar de variable tensorial satisface la condición de objetividad, según (1.7-19), si cumple:

$$\bar{f}^+ = \bar{f}, \text{ ó } \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^+) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.16-14)$$

Como las tensiones corrotadas de Kirchhoff se mantienen invariables ante rotaciones rígidas, esto es $\bar{\boldsymbol{\tau}}^+ \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}}$ de acuerdo a (1.7-18), entonces no se imponen restricciones a la función de fluencia, es decir, $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ puede representar un comportamiento anisotrópico en la plastificación. De otra manera, si la variable tensorial fuera una medida de tensión que no es invariable

ante rotaciones rígidas, tal el caso de σ según (1.7-12) o τ según (1.7-15), entonces la función de fluencia, para que se cumpla (1.16-14), debería ser una función isotrópica de las tensiones, y por lo tanto, debería depender solamente de los invariantes de tensiones (ver Simo – Hughes 1998, pag. 261). De acuerdo a lo visto aquí y en (1.13-5), se observa que formular el comportamiento del material en términos de tensiones corrotadas no impone restricciones de isotropía a la respuesta del modelo, ni en el campo elástico ni en el plástico.

En particular, si el material modelado es isotrópico, la función $\bar{f}(\bar{\tau})$ puede ser expresada en términos de los invariantes \bar{I}_1 , \bar{J}_2 y $\bar{\theta}$ de la tensión corrotada $\bar{\tau}$, y por la regla de diferenciación en cadena, el vector de flujo plástico (1.16-8) puede ser rescrito como (ver Owen – Hinton 1980, pag. 229 a 231):

$$\bar{\mathbf{a}}^T = \frac{\partial \bar{f}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, \bar{\theta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{J}_2} \frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{C}_1 \bar{\mathbf{a}}_1^T + \bar{C}_2 \bar{\mathbf{a}}_2^T + \bar{C}_3 \bar{\mathbf{a}}_3^T \quad (1.16-15)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{a}}_1^T = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2^T = \frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left\{ \bar{\tau}_{11}^d, \bar{\tau}_{22}^d, \bar{\tau}_{33}^d, 2\bar{\tau}_{12}, 2\bar{\tau}_{23}, 2\bar{\tau}_{31} \right\} \frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \quad (1.16-16)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3^T = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left\{ \bar{\tau}_{22}^d \bar{\tau}_{33}^d - \bar{\tau}_{23}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, \bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{33}^d - \bar{\tau}_{13}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, \bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{22}^d - \bar{\tau}_{12}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3}, 2\bar{\tau}_{11}^d \bar{\tau}_{23}, 2\bar{\tau}_{22}^d \bar{\tau}_{13}, 2\bar{\tau}_{33}^d \bar{\tau}_{12} \right\}$$

En tanto, las constantes \bar{C}_i , al igual que la forma explícita de la función de fluencia (1.16-4), están definidas según el criterio de plastificación que se adopte, el cual depende del material en estudio.

En este trabajo se desarrolla la formulación, en términos de las tensiones corrotadas de Kirchhoff, de dos criterios de plastificación: el criterio de Von Mises, aplicable a sólidos metálicos, y el criterio de Estados Críticos Modificado, aplicable a suelos arcillosos compresibles (ver sección 2.8). Para realizar dicha tarea es necesario calcular inicialmente los invariantes de tensiones. El primer invariante del tensor de Cauchy es:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \quad (1.16-17)$$

Expresándolo en función de las tensiones corrotadas $\bar{\tau}$ se tiene:

$$\bar{I}_1 = \bar{\tau}_{ii} = J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^E : \mathbf{I} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{R}^E \mathbf{I} (\mathbf{R}^E)^T = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = JI_1 \quad (1.16-18)$$

El segundo invariante del tensor desviador de las tensiones de Cauchy es:

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \quad (1.16-19)$$

y en términos de la tensión corrotada $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ resulta:

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \frac{1}{2} \bar{\tau}_{ij}^d \bar{\tau}_{ij}^d = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}^d : \bar{\boldsymbol{\tau}}^d \\ &= \frac{1}{2} [J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma}^d \mathbf{R}^E : J(\mathbf{R}^E)^T \boldsymbol{\sigma}^d \mathbf{R}^E] = \frac{1}{2} J^2 (\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d) = J^2 J_2 \end{aligned} \quad (1.16-20)$$

El tercer invariante del tensor desviador de Cauchy, teniendo en cuenta la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$, es:

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^d \sigma_{jk}^d \sigma_{ki}^d = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^d : (\boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d)^T = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d \quad (1.16-21)$$

y expresado en términos de la tensión corrotada de Kirchhoff es:

$$\bar{J}_3 = \frac{1}{3} \bar{\tau}_{ij}^d \bar{\tau}_{jk}^d \bar{\tau}_{ki}^d = \frac{1}{3} \bar{\boldsymbol{\tau}}^d : \bar{\boldsymbol{\tau}}^d \bar{\boldsymbol{\tau}}^d = \frac{1}{3} J^3 (\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d \boldsymbol{\sigma}^d) = J^3 J_3 \quad (1.16-22)$$

El criterio de plastificación de Von Mises establece los siguientes valores de las constantes de (1.16-15):

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= 0 \\ \bar{C}_2 &= J^{-1} \sqrt{3} \\ \bar{C}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.16-23)$$

mientras que la función de fluencia, representada gráficamente en la Figura 1-VI, y para endurecimiento isotrópico, resulta:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{k}) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - \bar{g}(\bar{k}) = 0 \quad (1.16-24)$$

donde $\bar{g}(\bar{k})$ es la tensión de comparación, dependiente de una única variable \bar{k} de endurecimiento, que define el límite elástico de la función de fluencia. Esta tensión de comparación es un parámetro que depende del material, y no depende de la medida de tensiones utilizada, es decir, su valor es el mismo si se mide sobre la configuración actual deformada o sobre la configuración corrotada:

$$\bar{g}(\bar{k}) = g(k) \Rightarrow \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.16-25)$$

Y como en el criterio de Von Mises:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2} \quad (1.16-26)$$

de acuerdo a (1.16-20) y (1.16-25), se llega a:

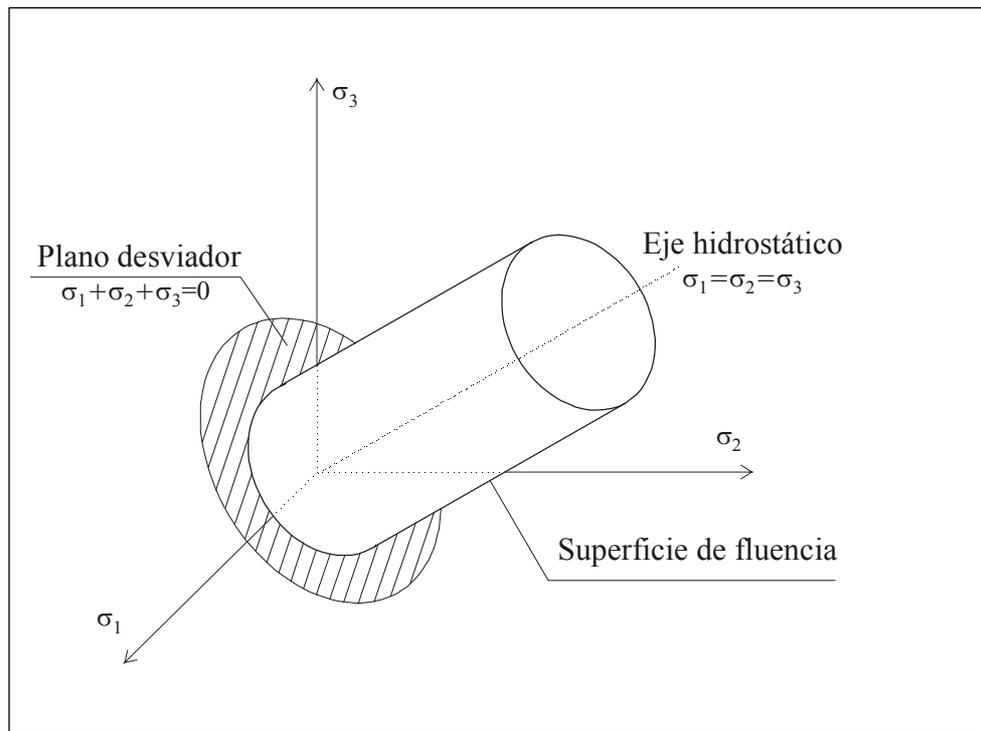


Figura 1-VI: Superficie de fluencia del criterio de Von Mises.

$$\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = J^{-1} \sqrt{3\bar{J}_2} = J^{-1} f(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (1.16-27)$$

El parámetro A definido en (1.16-6), para este criterio y considerando que $d\bar{k} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : d\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^P$ (work hardening), es igual al parámetro de endurecimiento H' :

$$A = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} = H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (1.16-28)$$

siendo E y E_T los módulos de elasticidad longitudinales correspondientes al campo elástico y plástico, respectivamente, obtenidos ambos de ensayos unidimensionales.

Capítulo 2

MECANICA NO LINEAL DE MEDIOS POROSOS SATURADOS

2.1 INTRODUCCION.

En este Capítulo se desarrolla el modelo matemático no lineal aplicado específicamente a suelos saturados compresibles, extendiendo los modelos presentados en el Capítulo 1 al análisis de materiales bifásicos, sólido – agua, e incorporando una función de fluencia adecuada para la descripción del comportamiento elastoplástico de las arcillas compresibles de la región Nordeste Argentino. El criterio de fluencia utilizado es el de Estados Críticos Modificado, desarrollado por Di Rado - Awruch (1997, Capítulos 2 y 3), remitiéndose a dicho trabajo a los lectores interesados de ampliar algún concepto de ese tema.

Inicialmente se hace una introducción del concepto de consolidación y el mecanismo con que este fenómeno se produce. En las secciones siguientes se realiza el tratamiento matemático del problema. Se comienza por el estudio de la fase sólida del suelo saturado, extendiendo la ecuación incremental del equilibrio, desarrollada en el Capítulo anterior para sólidos continuos, a sólidos porosos saturados de agua. Luego se estudia el comportamiento del agua que llena los poros del suelo a través de la ecuación de continuidad de los fluidos. El trata-

miento conjunto de ambas fases, sólido – agua, se realiza por medio de un sistema de ecuaciones acoplado. La solución de este sistema acoplado se busca aplicando el método de los elementos finitos, obteniéndose un sistema incremental de ecuaciones cuyas incógnitas son los incrementos de desplazamientos y de presión de poros. En la parte final del Capítulo se presenta el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado, en términos de la tensión corrotada de Kirchhoff, utilizado para modelar el comportamiento elastoplástico de las arcillas compresibles que abundan en esta región Nordeste de la Argentina.

2.2 LA CONSOLIDACION DE SUELOS SATURADOS.

Los asentamientos experimentados por los suelos compresibles son por lo general excesivos y/o irregulares, causando daños muy serios a las estructuras que soportan. Se requiere entonces de rigurosos análisis, como la simulación numérica, que puedan predecir dichos efectos con procedimientos de cálculo que sean capaces de representar las no linealidades físicas y geométricas del comportamiento de la masa del suelo.

La deformación de una masa de suelo bajo carga se debe principalmente a la reducción del volumen de los vacíos, llamados poros. Si estos poros se encuentran llenos de agua, caso que se conoce como saturado, la disminución de volumen se produce cuando el agua es expulsada de dichos poros. Este proceso se denomina consolidación de suelos.

El proceso de consolidación de suelos puede ser prácticamente instantáneo o durar un largo periodo de tiempo, según sea la permeabilidad de los suelos cargados. En terrenos muy permeables como las arenas, el proceso es casi instantáneo, puesto que el agua de los poros puede drenar rápidamente. En cambio, la consolidación de arcillas o limos arcillosos es mucho mas lenta, debido a la dificultad que encuentra el agua para escurrir dentro de una masa de suelo muy poco permeable, haciéndose necesario incluir al tiempo como una variable fundamental para tratar el problema. Este último caso es el analizado en el presente trabajo.

Es muy común caracterizar el problema de la consolidación de suelos a través del siguiente proceso: la carga o presión aplicada a la masa de suelo saturado, debido a la casi incompresibilidad del agua alojada en los poros, es tomada inicialmente por ésta en forma de una sobrepresión (por encima de la presión hidrostática que naturalmente tiene el agua) denominada tensión neutra o presión de poros. Luego, al transcurrir el tiempo, el agua sobreten-

sionada fluye disipando la presión de poros y transmitiendo la carga en mayor proporción a las partículas sólidas del suelo. Esta tensión genuina de la masa sólida o esqueleto granular, se denomina tensión efectiva. La suma de ambas tensiones, neutra y efectiva, debe siempre equilibrar a la carga total (peso propio, sobrecargas externas, etc.) que solicita la masa de suelo y que se denomina tensión total. Cuando el agua es expulsada en una medida suficiente como para anular la tensión neutra o presión de poros, la tensión efectiva se hace igual a la total, y en ese instante se considera que finaliza la consolidación primaria. La consolidación que se produce posteriormente se denomina consolidación secundaria, causada principalmente por la deformación de las partículas sólidas.

La deformación total de la masa de suelo, debido a la reducción de vacíos por la disipación de la presión de poros y a la deformación de las partículas sólidas, genera los asentamientos en superficie que afectan las estructuras fundadas sobre ese suelo.

2.3 LAS TENSIONES EN LA MASA DE SUELO.

En la mecánica de los medios porosos saturados es usual dividir la tensión de Cauchy total $\boldsymbol{\sigma}$ que soporta la masa de suelo en la tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}'$, soportada por las partículas sólidas, y en la presión de poros p , soportada por el agua que llena los vacíos intersticiales, y en el caso mas general también se llevan en cuenta las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^{\text{pr}}$ originadas por las deformaciones en los granos sólidos debidas a la presión de poros. Se puede escribir entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p.\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}^{\text{pr}} \quad (2.3-1)$$

donde \mathbf{I} es el tensor identidad de segundo orden, y la convención de signos usada es:

- para compresión del agua: $p > 0$

- para compresión de las partículas: $\sigma_{ii} < 0$

Multiplicando la (2.3-1) por J , Jacobiano del movimiento macroscópico de la fase sólida definido en (1.4-7), se obtiene, según (1.6-10), la tensión de Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau} = J.\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}' - J.p.\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}^{\text{pr}} \quad (2.3-2)$$

Y de acuerdo a (1.6-11), la tensión de Kirchhoff corrotada queda definida como:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T . \boldsymbol{\tau} . \mathbf{R} = \bar{\boldsymbol{\tau}}' - J.p.\mathbf{I} - \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\text{pr}} \quad (2.3-3)$$

En las soluciones incrementales de problemas no lineales, como fue visto en la sección 1.8, se utilizan las tasas de las tensiones y de las deformaciones. Además, si el problema invo-

lucra grandes deformaciones, o no linealidad geométrica, las tasas deberán ser objetivas (ver sección 1.7). En este trabajo se adoptó, en el desarrollo de los modelos tanto hipoelastoplástico, sección 1.13, como hiperelastoplástico, sección 1.15, la relación constitutiva en términos de la tasa de las tensiones corrotadas de Kirchhoff $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$, indiferente a rotaciones de cuerpo rígido, para describir el comportamiento del material. Expresando entonces la (2.3-3) en tasas, se obtiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}' - \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^w - \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{pr} \quad (2.3-4)$$

donde la parte absorbida por la fase sólida del suelo viene dada, a partir de (1.8-16) y en notación de Voigt, por:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}' = [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \bar{\mathbf{D}} \quad (2.3-5)$$

donde $[\bar{\mathbf{C}}^\tau]$ es la matriz constitutiva que contiene las propiedades del material suelo, obtenidas de ensayos drenados. Estableciendo de manera similar la relación entre las tasas de tensión y deformación provocadas por la presión de poros, se tiene:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{pr} = [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \bar{\mathbf{D}}^{pr} \quad (2.3-6)$$

siendo $\bar{\mathbf{D}}^{pr}$ la tasa de deformación corrotada de las partículas sólidas, generada por la presión de poros, cuya magnitud, asumiendo un comportamiento isotrópico de los granos sólidos, resulta:

$$\bar{\mathbf{D}}^{pr} = -\frac{1}{3k_s} \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^w \equiv \mathbf{D}^{pr} \quad (2.3-7)$$

donde se tuvo en cuenta la convención de signos definida al comienzo de la sección. Además k_s es el módulo de compresibilidad volumétrica de los granos del suelo, y $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^w$ está dado mas adelante en la (2.3-9). Finalmente, debido a la característica hidrostática (o esférica) de las tensiones del agua, despreciando cualquier esfuerzo tangencial por viscosidad, la presión de poros y su tasa resultan magnitudes configuracionalmente independientes. Esto es:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^w \equiv \boldsymbol{\tau}^w = J \cdot p \cdot \mathbf{I} \quad (2.3-8)$$

y:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^w \equiv \dot{\boldsymbol{\tau}}^w = \dot{J} \cdot p \cdot \mathbf{I} + J \cdot \dot{p} \cdot \mathbf{I} = J \cdot \mathbf{I} \cdot [(\mathbf{I} : \mathbf{D}) \cdot p + \dot{p}] \quad (2.3-9)$$

donde se tuvo en cuenta, según (1.4-8), que: $\dot{J} = J \text{traza}(\mathbf{D})$.

Para materiales isotrópicos, incorporando (2.3-5), (2.3-6), (2.3-7) y (2.3-9) en (2.3-4), se obtiene en notación matricial (o de Voigt):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} &= [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \bar{\mathbf{D}} - J \cdot \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot p + \dot{p}] + \frac{J}{3k_s} [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot p + \dot{p}] \\ &= [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \bar{\mathbf{D}} - J \cdot \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot \bar{\alpha} \cdot p - J \cdot \mathbf{m} \cdot \bar{\alpha} \cdot \dot{p}\end{aligned}\quad (2.3-10)$$

donde \mathbf{m} es un vector de componentes: $\mathbf{m}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$, y $\bar{\alpha}$ es la constante de Biot en la configuración corrotada (ver Figura 1-V), definida como:

$$\bar{\alpha} = 1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \quad (2.3-11)$$

Para la forma integrada (2.3-3), a partir de (2.3-7) y (2.3-8), también se deduce:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}' - J \cdot \bar{\alpha} \cdot p \cdot \mathbf{I} \quad (2.3-12)$$

2.4 ECUACION DE EQUILIBRIO EN TASAS DE MEDIOS POROSOS SATURADOS.

Para poder aplicar la ecuación de equilibrio en tasas (1.10-11) a suelos saturados, es necesario obtener primero una expresión de la tasa de tensión total medida sobre la configuración actual $\varphi(\mathcal{B})$. Expresando entonces la (2.3-4) en términos de la tasa objetiva de Jaumann de la tensión de Kirchhoff, y recordando la (1.13-14), se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \mathbf{R} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{R}^T = (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})' - (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^w - (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^{\text{pr}} \quad (2.4-1)$$

Llevando en cuenta (2.3-5), (2.3-6) y (2.3-9), se puede escribir en notación matricial o de Voigt:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})' &= [\mathbf{C}^{\tau J}] \cdot \mathbf{D} \\ (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^{\text{pr}} &= [\mathbf{C}^{\tau J}] \cdot \mathbf{D}^{\text{pr}} \\ (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^w &\equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^w = J \cdot \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot p + \dot{p}]\end{aligned}\quad (2.4-2)$$

donde $[\mathbf{C}^{\tau J}]$ es el tensor constitutivo, presentado en (1.8-6), cuya expresión, a partir de (1.8-16), (1.4-23) y (1.13-14), resulta en notación tensorial:

$$\mathbf{C}^{\tau J} = \mathbf{R} \mathbf{R} \bar{\mathbf{C}}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T, \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau J} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}_{mnpq}^\tau \quad (2.4-3)$$

expresión que involucra la suposición simplificativa de considerar $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$ en la (1.13-13). Por otra parte, \mathbf{D}^{pr} es la tasa de deformación de los granos sólidos generada por la presión de po-

ros, cuya magnitud para materiales isotrópicos está dada por la (2.3-7). Para estos casos de isotropía, también se puede expresar la (2.3-10) en términos de $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = [\mathbf{C}^{\tau J}].\mathbf{D} - J.\mathbf{m}.\mathbf{m}^T.\mathbf{D}.\alpha.p - J.\mathbf{m}.\alpha.\dot{p} \quad (2.4-4)$$

donde α es la constante de Biot medida sobre la configuración actual deformada, dada por:

$$\alpha = 1 - \frac{\mathbf{m}^T.[\mathbf{C}^{\tau J}].\mathbf{m}}{9k_s} \quad (2.4-5)$$

Llevando en cuenta (2.4-1) y (2.4-2) en (1.8-11), se puede calcular la falsa derivada de la tensión de Kirchhoff de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{\nabla c} &\equiv L_v \boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})' - (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^w - (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})^{pr} - \mathbf{D}.\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}.\mathbf{D} \\ &= [\mathbf{C}^{\tau J}].\mathbf{D} - J.\mathbf{m}.[(\mathbf{m}^T.\mathbf{D}).p + \dot{p}] - [\mathbf{C}^{\tau J}].\mathbf{D}^{pr} - [\mathbf{C}'].\mathbf{D} \\ &= [\mathbf{C}^\tau].\mathbf{D} - J.\mathbf{m}.[(\mathbf{m}^T.\mathbf{D}).p + \dot{p}] - [\mathbf{C}^{\tau J}].\mathbf{D}^{pr} \end{aligned} \quad (2.4-6)$$

con \mathbf{C}' dado, en notación tensorial, por:

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} + \delta_{jl}\tau_{ik}) \quad (2.4-7)$$

expresión análoga a la (1.13-9), pero donde $\boldsymbol{\tau}$ ahora representa a la tensión de Kirchhoff total, dada en (2.3-2), del material bifásico suelo saturado. Además, a partir de (2.4-3) y (2.4-6), se tiene:

$$\mathbf{C}^\tau = \mathbf{C}^{\tau J} - \mathbf{C}' = \mathbf{R}\mathbf{R}\bar{\mathbf{C}}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C^\tau_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}^\tau_{mnpq} - C'_{ijkl} \quad (2.4-8)$$

No debe confundirse este tensor constitutivo con el que se obtiene de la siguiente separación de la falsa derivada de la tensión de Kirchhoff:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla c} \equiv L_v \boldsymbol{\tau} = (L_v \boldsymbol{\tau})' - (L_v \boldsymbol{\tau})^w - (L_v \boldsymbol{\tau})^{pr} \quad (2.4-9)$$

donde:

$$(L_v \boldsymbol{\tau})' = (\boldsymbol{\tau}^{\nabla J})' - \mathbf{D}.\boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}'.\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{D} \quad (2.4-10)$$

con:

$$\tilde{\mathbf{C}}^\tau = \mathbf{C}^{\tau J} - \tilde{\mathbf{C}}' = \mathbf{R}\mathbf{R}\bar{\mathbf{C}}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \tilde{\mathbf{C}}', \text{ ó } \tilde{C}^\tau_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\bar{C}^\tau_{mnpq} - \tilde{C}'_{ijkl} \quad (2.4-11)$$

y:

$$\tilde{\mathbf{C}}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau}'.\mathbf{D}, \text{ ó } \tilde{C}'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau'_{jl} + \delta_{il}\tau'_{jk} + \delta_{jk}\tau'_{il} + \delta_{jl}\tau'_{ik}) \quad (2.4-12)$$

expresión en términos de la tensión de Kirchhoff efectiva.

Para materiales isotrópicos, recordando (2.4-4), la (2.4-6) queda expresada:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = [\mathbf{C}^\tau].\mathbf{D} - J.\mathbf{m}.\mathbf{m}^T.\mathbf{D}.\alpha.p - J.\mathbf{m}.\alpha.\dot{p} \quad (2.4-13)$$

estando la constante de Biot α dada en (2.4-5).

Recordando la (1.10-10) y lo comentado en el párrafo siguiente, es posible obtener la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, equivalente a (1.10-11) pero aplicable a medios porosos saturados:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : \left[{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} + {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D} - J \mathbf{I} \cdot (\mathbf{I} : {}^t \mathbf{D} \cdot {}^t p + \dot{p}) - {}^t \mathbf{C}^{\tau J} : {}^t \mathbf{D}^{\text{pr}} \right] \frac{d\varphi(B)}{J} = \\ = \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial \varphi(B) \end{aligned} \quad (2.4-14)$$

o, para materiales isotrópicos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : \left[{}^t \mathbf{L} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau} + {}^t \mathbf{C}^\tau : {}^t \mathbf{D} - J \mathbf{I} \cdot (\mathbf{I} : {}^t \mathbf{D}) \cdot {}^t \alpha \cdot {}^t p - J \mathbf{I} \cdot {}^t \alpha \cdot \dot{p} \right] \frac{d\varphi(B)}{J} = \\ = \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial \varphi(B) \end{aligned} \quad (2.4-15)$$

Para llegar al sistema acoplado, y antes de implementar la solución por el método de los elementos finitos, es necesario analizar el comportamiento de la fase fluida (el agua) que llena los poros del medio poroso saturado.

2.5 ECUACION DE CONTINUIDAD DEL FLUIDO.

El movimiento de los fluidos a través de un medio poroso saturado está gobernado por la ley de Darcy, que puede ser expresada en la configuración geométrica del tiempo actual de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}^w = -\mathbf{k} \cdot \nabla (\gamma \cdot z + p) \quad (2.5-1)$$

donde \mathbf{v}^w es el vector velocidad espacial del fluido, \mathbf{k} es una matriz que contiene los coeficientes de permeabilidad del suelo en las diferentes direcciones, γ es el peso específico del agua, z es la altura geodésica en relación al sistema de referencia y ∇ es el vector gradiente espacial.

Por otra parte, la ecuación de continuidad del fluido viene dada por:

$$\nabla^T \mathbf{v}^w - \dot{\chi} = 0 \quad (2.5-2)$$

donde $\dot{\chi}$ es la tasa de acumulación del fluido por unidad de volumen de la configuración actual $\varphi(\mathbf{B})$, dependiente de (ver Zienkiewicz – Humpheson – Lewis 1977, pag. 155 y 156):

a) La tasa de acumulación debido a la deformación específica total volumétrica:

$$\dot{\chi}_1 = -D_{\text{vol}} = -\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D} \quad (2.5-3)$$

b) La tasa de acumulación debida a la variación de volumen de los granos del suelo, producida por la variación de presión:

$$\dot{\chi}_2 = -(1-n) \frac{\dot{p}}{k_s} \quad (2.5-4)$$

donde n es la porosidad del suelo.

c) La tasa de acumulación debida a la compresibilidad del fluido:

$$\dot{\chi}_3 = -n \frac{\dot{p}}{k_w} \quad (2.5-5)$$

donde k_w es el coeficiente de compresibilidad volumétrica del agua.

d) La tasa de acumulación debida a la compresibilidad media de los granos del suelo, producida por la variación de las tensiones efectivas actuando sobre el volumen actual $(1-n)$ de la fase sólida:

$$\dot{\chi}_4 = \frac{1}{3k_s} \mathbf{m}^T \cdot [\mathbf{C}^{\text{tj}}] \cdot \left(\mathbf{D} + \frac{\dot{p}}{3k_s} \mathbf{m} \right) \quad (2.5-6)$$

Introduciendo (2.5-3), (2.5-4), (2.5-5) y (2.5-6) en (2.5-2), y teniendo en cuenta la expresión (2.5-1), se obtiene:

$$\left[\frac{(1-n)}{k_s} + \frac{n}{k_w} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \cdot [\mathbf{C}^{\text{tj}}] \cdot \mathbf{m} \right] \cdot \dot{p} - \nabla^T \mathbf{k} \cdot \nabla p + \left(\mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \cdot [\mathbf{C}^{\text{tj}}]}{3k_s} \right) \cdot \mathbf{D} = \nabla^T \mathbf{k} \cdot \nabla (\gamma \cdot z) \quad (2.5-7)$$

Esta ecuación, válida en la configuración actual deformada $\mathbf{S} = \varphi(\mathbf{B})$, tiene como condiciones de contorno, en $\partial\varphi(\mathbf{B}) = \partial_p\varphi(\mathbf{B}) \cup \partial_v\varphi(\mathbf{B})$, los valores prescritos de la presión de poros \bar{p} y de velocidad del fluido $\bar{\mathbf{v}}^w$:

$$p = \bar{p} \quad \text{en } \partial_p\varphi(\mathbf{B})$$

$$-\mathbf{k} \cdot \nabla p = \bar{\mathbf{v}}^w \quad \text{en } \partial_v\varphi(\mathbf{B})$$

También se tienen condiciones iniciales del tipo $p = {}^0p$ en la configuración original \mathbf{B} .

2.6 SISTEMA SOLIDO - AGUA ACOPLADO.

El análisis en conjunto del medio bifásico en estudio, suelo saturado, se puede realizar mediante el acoplamiento de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de cada una de las fases. De esta manera las incógnitas de cada ecuación son calculadas simultáneamente considerando la interacción de las fases.

La fase sólida (o esqueleto granular) del suelo está gobernado por la ecuación de equilibrio (2.4-15), en tanto, la fase fluida (el agua) se rige por la ecuación de continuidad (2.5-7). Para poder encontrar la solución de esta última ecuación es necesario aplicarle el método de Galerkin, con un factor de peso δp , obteniéndose la siguiente expresión integral sobre la configuración actual:

$$\begin{aligned} \int_{t\varphi(\mathcal{B})} \delta p \cdot s \cdot \dot{p} \cdot d\varphi(\mathcal{B}) + \int_{t\varphi(\mathcal{B})} (\nabla \delta p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla p \cdot d\varphi(\mathcal{B}) + \int_{t\varphi(\mathcal{B})} \delta p \frac{1}{3} \left(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T - \frac{\mathbf{m}^T \cdot [\mathbf{C}^{\tau j}] \cdot \mathbf{m}}{3k_s} \right) \cdot \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D} \cdot d\varphi(\mathcal{B}) = \\ = - \int_{t\varphi(\mathcal{B})} (\nabla \delta p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla (\gamma \cdot z) \cdot d\varphi(\mathcal{B}) - \int_{\partial_v \varphi(\mathcal{B})} \delta p \cdot \left[\mathbf{k} \cdot \frac{\partial (p + \gamma \cdot z)}{\partial \mathbf{n}} \right] \cdot d\varphi(\mathcal{B}) \end{aligned} \quad (2.6-1)$$

donde \mathbf{n} es la dirección normal al contorno $\partial_v \varphi(\mathcal{B})$, y:

$$s = \left[\frac{(1-n)}{k_s} + \frac{n}{k_w} - \frac{1}{(3k_s)^2} \mathbf{m}^T \cdot [\mathbf{C}^{\tau j}] \cdot \mathbf{m} \right] \quad (2.6-2)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.4-15) y (2.6-1) constituyen el sistema acoplado del medio poroso saturado, cuyas incógnitas, los incrementos o tasas de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ y de presión de poros \dot{p} , pueden ser calculadas aplicando el método de los elementos finitos.

2.7 APLICACION DEL M.E.F. AL SISTEMA ACOPLADO.

En la aplicación del método de los elementos finitos (M.E.F.) las incógnitas del problema, las tasas de los desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ y de la presión de poros \dot{p} , son interpoladas en términos de sus valores nodales usando funciones de interpolación \mathbf{N}^u y \mathbf{N}^p respectivamente. Para tener uniformidad en el grado de exactitud del cálculo de las incógnitas, en la solución de problemas numéricos se utilizarán elementos rectangulares de ocho nodos para los desplazamientos y de cuatro para la presión de poros, debido a que la presión de poros, de acuerdo a

(2.3-1), es una magnitud que debe tener el mismo grado de precisión que las tensiones, calculadas éstas a partir de derivadas de los desplazamientos. Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}\{\dot{\mathbf{u}}\} &= \mathbf{N}^u \cdot \{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\} \\ \dot{p} &= \mathbf{N}^p \cdot \{\dot{\hat{p}}\}\end{aligned}\quad (2.7-1)$$

donde los valores de las incógnitas en los nodos del elemento finito están dados por los vectores $\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$ para la tasa de desplazamientos, y $\{\dot{\hat{p}}\}$ para la tasa de la presión de poros.

Discretizando la ecuación de equilibrio (2.4-15) de manera análoga a lo hecho en la sección 1.11, y llevando en cuenta (2.7-1), con $\dot{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{v}$, se puede escribir en cada elemento finito:

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}} - \tilde{\mathbf{L}} \cdot \dot{\hat{p}} = \dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \quad (2.7-2)$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int_{\varphi(B)} (\mathbf{B}^u)^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] \cdot \mathbf{B}^u \frac{d\varphi(B)}{J} + \\ &+ \int_{\varphi(B)} (\boldsymbol{\beta}^u)^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{\beta}^u \cdot d\varphi(B) - \int_{\varphi(B)} (\mathbf{B}^u)^T \cdot {}^t \alpha \cdot {}^t p \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{B}^u \cdot d\varphi(B)\end{aligned}\quad (2.7-3)$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \int_{\varphi(B)} (\mathbf{B}^u)^T \cdot {}^t \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(B) \quad (2.7-4)$$

y:

$$\dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \int_{\varphi(B)} (\mathbf{N}^u)^T \cdot \{\dot{\hat{\mathbf{b}}}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial \varphi(B)} (\mathbf{N}^u)^T \cdot \{\dot{\hat{\mathbf{t}}}\} \cdot d\partial \varphi(B) \quad (2.7-5)$$

donde $\boldsymbol{\beta}^u$ y \mathbf{B}^u son las relaciones $\{\mathbf{L}\} - \{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$, según (1.11-8), y $\{\mathbf{D}\} - \{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$, según (1.11-7), respectivamente, pero expresados ambos en términos de \mathbf{N}^u . Además, el valor de α está dado en (2.4-5), y el de $[\mathbf{C}^\tau]$ se obtiene de (2.4-8).

Discretizando también la ecuación de continuidad del fluido (2.6-1), llevando en cuenta (2.7-1), se obtiene a nivel de cada elemento:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \dot{\hat{p}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{H} \cdot {}^t \hat{p} = -\tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \quad (2.7-6)$$

siendo:

$$\mathbf{S}_1 = \int_{\varphi(B)} (\mathbf{N}^p)^T \cdot s \cdot \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(B) \quad (2.7-7)$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \int_{\varphi(B)} (\mathbf{B}^u)^T \cdot {}^t \alpha \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(B) \quad (2.7-8)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\mathcal{B}} (\nabla \mathbf{N}^p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(\mathcal{B}) \quad (2.7-9)$$

y:

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}} (\nabla \mathbf{N}^p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla (\gamma \cdot z) \cdot d\varphi(\mathcal{B}) + \int_{\partial_v \varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{N}^p)^T \cdot \bar{\mathbf{v}}_n^w \cdot d\partial \varphi(\mathcal{B}) \quad (2.7-10)$$

con s definido en (2.6-2) y donde $\bar{\mathbf{v}}_n^w$ es la velocidad de flujo prescrita normal al contorno $\partial_v \varphi(\mathcal{B})$, dada por:

$$\bar{\mathbf{v}}_n^w = - \left[\mathbf{k} \frac{\partial (p + \gamma z)}{\partial \mathbf{n}} \right] = \bar{\mathbf{v}}^w \cdot \mathbf{n} \quad (2.7-11)$$

Juntando la expresiones (2.7-2) y (2.7-6) se obtiene la forma matricial del sistema acoplado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\tilde{\mathbf{L}} \\ \tilde{\mathbf{L}}^T & \mathbf{S}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{u}}} \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} \\ -\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} \end{Bmatrix} \quad (2.7-12)$$

Aplicando el método del parámetro Θ a la incógnita p se tiene:

$$\dot{p} = \Theta \cdot {}^{t+\Delta t} \dot{p} + (1 - \Theta) \cdot {}^t \dot{p} \quad (2.7-13)$$

con $0 \leq \Theta \leq 1$; y considerando que: $(*) = \frac{{}^{t+\Delta t} (*) - {}^t (*)}{\Delta t}$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\tilde{\mathbf{L}} \\ \tilde{\mathbf{L}}^T & (\mathbf{S}_1 + \Theta \cdot \Delta t \cdot \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\tilde{\mathbf{L}} \\ \tilde{\mathbf{L}}^T & [\mathbf{S}_1 - (1 - \Theta) \Delta t \cdot \mathbf{H}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \Delta t \begin{Bmatrix} \Theta \cdot {}^{t+\Delta t} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} + (1 - \Theta) \cdot {}^t \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}} \\ \Theta \cdot (-{}^{t+\Delta t} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}}) + (1 - \Theta) \cdot (-{}^t \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_{\text{ext}}) \end{Bmatrix} \quad (2.7-14) \end{aligned}$$

Llevando esta última expresión a una forma incremental simétrica, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\tilde{\mathbf{L}} \\ -\tilde{\mathbf{L}}^T & -(\mathbf{S}_1 + \Theta \cdot \Delta t \cdot \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta t \cdot \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t \hat{\mathbf{u}} \\ {}^t \hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \\ \Delta \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \end{Bmatrix} \quad (2.7-15)$$

donde, para eliminar la asimetría del sistema, se cambió el signo de la última ecuación.

La expresión (2.7-15) luego de ser montada para todo el dominio en estudio, e incluidas las correspondientes condiciones de contorno, conduce al sistema de ecuaciones algebraicas incrementales que son resueltas iterativamente, de acuerdo a lo discutido en la sección 1.2, debido a que el problema es no lineal.

El proceso iterativo se extiende hasta que el error o residuo \mathfrak{R} sea menor o igual a una tolerancia preestablecida. Este residuo, análogamente a (1.11-21), se calcula para medios porosos saturados de la siguiente manera:

$$\mathfrak{R} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \Delta t \cdot \mathbf{H} \cdot {}^t \hat{\mathbf{p}} + \Delta \tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \int (\mathbf{B}^u)^T \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \} d\varphi(\mathcal{B}) \\ - \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot ({}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{u}}) - (\mathbf{S}_1 + \boldsymbol{\Theta} \cdot \Delta t \cdot \mathbf{H}) \cdot ({}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{p}}^{(i)} - {}^t \hat{\mathbf{p}}) \end{array} \right\} \neq \mathbf{0} \quad (2.7-16)$$

donde $\{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \}$ es el vector de tensiones totales (tensiones efectivas más presión de poros) de Cauchy, calculado a partir de (1.6-11), como:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{R} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{R}^T)^{(i)} \quad (2.7-17)$$

en términos de la tensión corrotacional total de Kirchhoff $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, cuyo valor en la iteración (i) del tiempo $t+\Delta t$ es directamente la sumatoria de los incrementos de tensión total (2.3-4) evaluados hasta ese momento.

2.8 CRITERIO DE PLASTIFICACION PARA SUELOS COMPRESIBLES.

En la sección 1.16 se desarrolló el criterio de plastificación de Von Mises, aplicable a metales, en términos de las tensiones corrotadas, quedando pendiente el desarrollo de un criterio de plastificación o fluencia aplicable a suelos arcillosos compresibles, también en términos de las tensiones corrotadas. En este trabajo se ha elegido el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado para la descripción del comportamiento elastoplástico del suelo. El criterio de Estados Críticos, ha sido propuesto originalmente por Zienkiewicz – Humpheson – Lewis (1975), y modificado luego por Di Rado - Awruch (1997).

El criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado establece una función de fluencia $F(p', q, \theta) = 0$ expresada en términos de los invariantes p' , q y θ , cuyas expresiones son:

$$p' = -\frac{I_1}{3} \quad (2.8-1)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (2.8-2)$$

$$\text{sen}(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (2.8-3)$$

donde I_1 es el primer invariante, J_2 y J_3 son los segundo y tercer invariantes, respectivamente, del tensor desviador, los tres de las tensiones efectivas de Cauchy σ' . El valor de θ calculado a partir de (2.8-3) tiene como valores límites: $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

Expresando los invariantes en términos de la tensión efectiva corrotada $\bar{\tau}'$, llevando en cuenta (1.16-18), (1.16-20) y (1.16-22), se obtiene:

$$\bar{p}' = -\frac{\bar{I}_1}{3} = -\frac{JI_1}{3} = Jp' \tag{2.8-4}$$

$$\bar{q} = \sqrt{3\bar{J}_2} = \sqrt{3J^2 J_2} = Jq \tag{2.8-5}$$

$$\text{sen}(3\bar{\theta}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{(\bar{J}_2)^{3/2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J^3 J_3}{(J^2 J_2)^{3/2}} = \text{sen}(3\theta) \tag{2.8-6}$$

Concretamente, el criterio de fluencia de Estados Críticos Modificado puede escribirse:

$$F(p', q, \theta) = f(p', q, \theta) - g(k) = \frac{p'+a}{2} \left[\left(\frac{q}{p'+a} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \phi^*} + 1 \right] - p_{co} = 0 \tag{2.8-7}$$

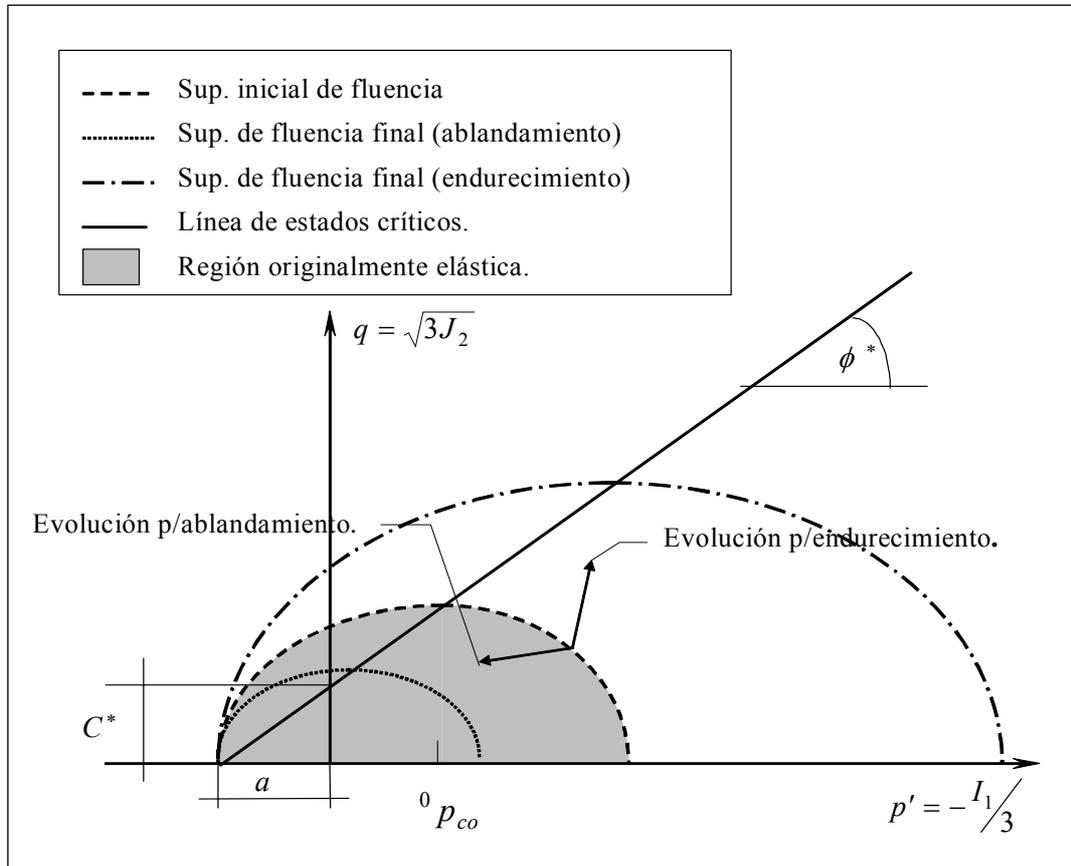


Figura 2-I: Criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado.

donde $g(k) = p_{co}$ es la tensión de comparación que define el límite elástico de la función de fluencia, y $(2p_{co} - a)$ es la presión inicial de preconsolidación, ver Figura 2-I. Además:

$$a = \frac{C^*}{\text{tg}\phi^*} = \frac{c}{\text{tg}\phi} \quad (2.8-8)$$

con:

$$\text{tg}\phi^* = \frac{3\text{sen}\phi}{\sqrt{3}.\cos\theta - \text{sen}\phi.\text{sen}\theta} \quad (2.8-9)$$

y

$$C^* = \frac{3.c.\cos\phi}{\sqrt{3}.\cos\theta - \text{sen}\phi.\text{sen}\theta} \quad (2.8-10)$$

siendo c y ϕ los coeficientes de cohesión y fricción interna del suelo, respectivamente. En la Figura 2-I se puede observar que sobre la línea de estados críticos se tiene:

$$\left[\frac{q}{(p'+a)\text{tg}\phi^*} \right] = 1.$$

El coeficiente de cohesión medido en la configuración corrotada resulta: $\bar{c} = J.c$, mientras que el ángulo de fricción interna se mantiene inalterado, esto es: $\bar{\phi} \equiv \phi$. En consecuencia, expresando las magnitudes (2.8-8), (2.8-9) y (2.8-10) en términos de las tensiones efectivas corrotadas, recordando además que $\bar{\theta} \equiv \theta$ según (2.8-6), se tiene:

$$\bar{a} = \frac{\bar{c}}{\text{tg}\phi} = J.a \quad (2.8-11)$$

$$\text{tg}\bar{\phi}^* = \frac{3\text{sen}\bar{\phi}}{\sqrt{3}.\cos\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi}.\text{sen}\bar{\theta}} = \text{tg}\phi^* \quad (2.8-12)$$

$$\bar{C}^* = \frac{3.\bar{c}.\cos\bar{\phi}}{\sqrt{3}.\cos\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi}.\text{sen}\bar{\theta}} = J.C^* \quad (2.8-13)$$

Análogamente a lo visto en (1.16-25), la tensión de comparación p_{co} es independiente del tensor de tensiones usado en la definición de la superficie de fluencia (2.8-7), es decir:

$$\bar{g}(\bar{k}) \equiv g(k) = p_{co} \Rightarrow \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) \equiv f(p', q, \theta) \quad (2.8-14)$$

siendo $\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})$ la función de fluencia definida en términos de las tensiones efectivas corrotadas $\bar{\tau}'$:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) &= J^{-1} \frac{\bar{p}' + \bar{a}}{2} \left[\left(\frac{\bar{q}}{\bar{p}' + \bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \phi^*} + 1 \right] \\
&= J^{-1} \frac{Jp' + Ja}{2} \left[\left(\frac{Jq}{Jp' + Ja} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \phi^*} + 1 \right] \\
&= J^{-1} f(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) \equiv f(p', q, \theta)
\end{aligned} \tag{2.8-15}$$

donde se llevaron en cuenta las (2.8-4), (2.8-5), (2.8-11) y (2.8-12).

El vector de flujo plástico $\bar{\mathbf{a}}$ se desarrolla en función de $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$ según (1.16-15), y sus términos $\bar{\mathbf{a}}_i$ lo hacen según (1.16-16), en tanto que las constantes \bar{C}_i , para el criterio de Estados Críticos Modificado, quedan definidos como:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial I_1} = \frac{J^{-1}}{6} \left\{ \left[\frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \phi^*} \right]^2 - 1 \right\} \\
\bar{C}_2 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\bar{J}_2)^{1/2}} = \frac{J^{-1}}{\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \phi^*} \left[\frac{3}{\text{tg} \phi^*} + \text{tg} 3\theta \frac{(\sqrt{3} \text{sen} \theta + \cos \theta \text{sen} \phi)}{\text{sen} \phi} \right] \\
\bar{C}_3 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}} = \frac{J^{-1}}{2 \cdot \cos 3\theta} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \cdot \text{tg} \phi^* \cdot \bar{J}_2} \left(\frac{\sqrt{3} \text{sen} \theta + \cos \theta \text{sen} \phi}{\text{sen} \phi} \right)
\end{aligned} \tag{2.8-16}$$

En el caso que θ adopte los valores límites anteriormente señalados, $\theta = \pm 30^\circ$, las constantes \bar{C}_2 y \bar{C}_3 vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_2 \Big|_{\theta = \pm 30^\circ} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a})} \left[\frac{1}{\text{sen}^2 \phi} \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \text{sen} \phi \right)^2 \right] \\
\bar{C}_3 \Big|_{\theta = \pm 30^\circ} &= 0
\end{aligned} \tag{2.8-17}$$

Análogamente al caso de los sólidos continuos, la distinción entre el comportamiento elástico y plástico de los materiales porosos se visualiza sobre un gráfico tensión – deformación específica, y específicamente para el material suelo, dicha distinción se aprecia mejor analizando el comportamiento durante un proceso de compresión confinada o ensayo odométrico. En la Figura 2-II se grafica la respuesta linealizada del suelo cuando es sometido a una compresión efectiva p' , representándose en el eje de ordenadas el volumen específico: $v=1+e$, siendo e la relación de vacíos actual del suelo, y en el eje de abscisas, el logaritmo natural de p' .

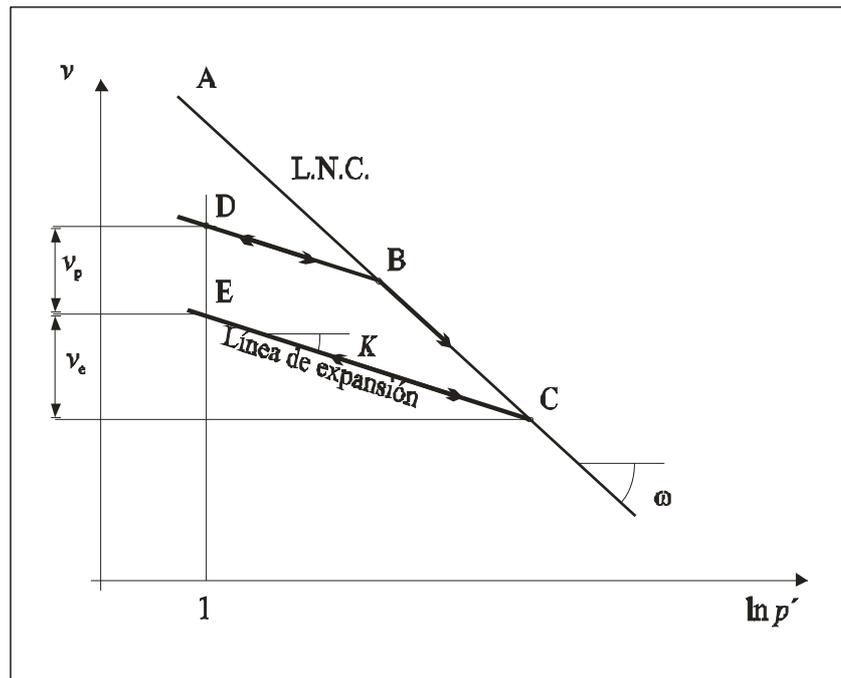


Figura 2-II: Curva de Compresibilidad. Trayectorias elásticas y plásticas.

En el gráfico la línea A-B-C es la recta virgen de consolidación, o línea normalmente consolidada (L.N.C.), que describe la respuesta del suelo cuando es sometido a presiones superiores a cualesquiera antes soportadas. En la descarga el suelo describe líneas tales como la B-D o C-E, denominadas rectas de expansión y recarga, sobre las cuales las deformaciones experimentadas son totalmente recuperables o elásticas, mientras que sobre la recta virgen de consolidación se producen deformaciones elásticas y plásticas (o irreversibles). Las pendientes de las líneas de expansión y normalmente consolidada son, respectivamente, K y ω .

La evolución de la superficie de fluencia, sea ésta un endurecimiento o un ablandamiento, se calcula con la siguiente ecuación:

$$p_{co} = {}^0 p_{co} \cdot \exp(\chi \cdot \varepsilon_v^P) \quad (2.8-18)$$

siendo ${}^0 p_{co}$ la preconsolidación inicial (ver Figura 2-I), ε_v^P la deformación volumétrica plástica total, y χ un coeficiente dado por:

$$\chi = -\beta \frac{1 + e_0}{\omega - K} \quad (2.8-19)$$

donde e_0 es la relación inicial de vacíos, ω y K son los índices de compresión y expansión, respectivamente, definidos en la Figura 2-II a partir de ensayos odométricos, y β es una va-

riable de endurecimiento que debe ser ajustada en función del tipo de suelo, pero que es del orden de ${}^0 p_{co}$.

A efectos de utilizar directamente los parámetros medidos de ensayos, las variables χ y ε_v^P de (2.8-18) se definen en la configuración deformada. También podrían definirse en la configuración corrotada, pero requerirían un cálculo adicional sin sentido ya que, de acuerdo a lo visto en (2.8-14), la tensión de comparación p_{co} es configuracionalmente independiente.

La deformación volumétrica plástica queda definida a partir de (1.16-1), pero en la configuración actual deformada, como:

$$d\varepsilon_v^P = d\Lambda \frac{\partial f(p', q, \theta)}{\partial (I_1/3)} \quad (2.8-20)$$

donde $d\Lambda$ es el multiplicador plástico. Derivando $f(p', q, \theta)$, dada en (2.8-7), respecto a $p' = -I_1/3$, se puede escribir:

$$d\varepsilon_v^P = d\Lambda \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (2.8-21)$$

con $\text{tg} \phi^*$ definida en (2.8-9), y:

$$\eta = \frac{q}{(p'+a)} \quad (2.8-22)$$

Aplicando logaritmo natural a (2.8-18) y diferenciando ambos miembros, se deduce la relación entre la variación de la presión p_{co} y la deformación volumétrica ε_v^P :

$$\frac{dp_{co}}{p_{co}} = \chi \cdot d\varepsilon_v^P \quad (2.8-23)$$

Esta expresión y la (2.8-21) son las utilizadas para el cálculo del parámetro A , definido en (1.16-6), que para este criterio de plastificación y considerando que: $dk = d\varepsilon_v^P$ (strain hardening), resulta:

$$A = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\Lambda} = \frac{\partial g}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} = \frac{dp_{co}}{d\varepsilon_v^P} \frac{d\varepsilon_v^P}{d\Lambda} = \frac{p_{co}}{2} \chi \left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (2.8-24)$$

Como puede observarse, el igual que $\bar{g}(\bar{k}) \equiv g(k) = p_{co}$, este parámetro también es una magnitud configuracionalmente independiente.

Capítulo 3

APLICACION COMPUTACIONAL

3.1 INTRODUCCION.

Este Capítulo presenta en detalle los procedimientos de cálculo para la aplicación computacional de los modelos desarrollados en los Capítulos 1 y 2, vale decir, para materiales sólidos continuos y porosos saturados, respectivamente. La formulación de los procedimientos se encuentra ordenada según la secuencia con que el programa computacional realiza los cálculos. La definición de las ecuaciones y variables de la formulación presentada debe ser buscada en los Capítulos respectivos, o mas resumidamente en la lista de símbolos ubicada al comienzo del texto.

El programa computacional desarrollado en esta Tesis es una extensión del programa FECCUND (Finite Element Consolidation Code Unlinear Development), construido durante la Tesis de Magíster de Di Rado, H. A. (1997), a problemas no lineales geométricos, agregándose además el tratamiento de tensiones y preconsolidaciones iniciales. También se incluyó un nuevo algoritmo de retorno de tensiones, algoritmo Plano Cortante, para el análisis de no linealidad física. El programa completo ha sido codificado en lenguaje Fortran, y se encuentra

disponible en el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la U.N.N.E.

A continuación de los procedimientos de cálculo de las primeras secciones, se presentan soluciones numéricas de varios problemas estructurales. Para los cálculos se utilizan elementos finitos rectangulares de ocho nodos para la descripción de la variable desplazamiento, y de cuatro nodos para la descripción de la variable presión de poros (usada en los modelos de suelos saturados), con 2×2 puntos de Gauss para la integración numérica. Los problemas resueltos corresponden a estados planos de tensiones y estados planos de deformaciones, y fueron tomados en su mayoría de publicaciones de reconocidos autores con el objeto de poder comparar y validar los resultados de los modelos desarrollados y programados en esta Tesis, tanto para sólidos continuos como para suelos saturados. En los ejemplos presentados se utilizan los criterios de plastificación de Von Mises para metales y de Estados Críticos Modificado para suelos saturados compresibles.

En el desarrollo numérico se toma como configuración de referencia a la geometría original y se la va actualizando al alcanzar el equilibrio en cada paso de carga, genéricamente en el tiempo t , actualizándose también las magnitudes que describen el estado tensional y de deformación del cuerpo. En cuanto a las tensiones iniciales se las toma como preexistentes en el cuerpo al momento de comenzar el análisis, sin llevar en cuenta las deformaciones que acompañaron su aparición, es decir, se toma la configuración original (indeformada) sometida a estas tensiones preexistentes.

3.2 PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA SOLIDOS CONTINUOS.

[1] Inicio del proceso con: $t = 0$, ${}^t \mathbf{x} = \mathbf{X}$, ${}^t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, ${}^t \mathbf{F} = {}^t \mathbf{R} \cdot {}^t \mathbf{U} = {}^t \mathbf{F}^E \cdot {}^t \mathbf{F}^P = \mathbf{I}$, ${}^t \bar{\boldsymbol{\tau}} = {}^t \boldsymbol{\sigma} = {}^0 \boldsymbol{\sigma}$, ${}^t \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{k}}) = {}^0 \mathbf{g}$, ${}^t \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$. Siendo \mathbf{I} la matriz identidad, ${}^0 \boldsymbol{\sigma}$ las tensiones iniciales o preexistentes en el cuerpo y ${}^0 \mathbf{g}$ la tensión de comparación (o límite elástico) inicial.

- [2] Progreso del tiempo un paso Δt (tiempo actual = $t+\Delta t$), aplicando un incremento de carga definido en (1.11-16):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{{}^t \varphi(\mathbf{B})} \mathbf{N}^T \cdot \{{}^{t+\Delta t} \mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(\mathbf{B}) + \int_{\partial {}^t \varphi(\mathbf{B})} \mathbf{N}^T \cdot \{{}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial \varphi(\mathbf{B})$$

con: $\{{}^{t+\Delta t} \mathbf{b}\} = \{{}^t \mathbf{b}\} + \{\Delta \mathbf{b}\}$ y $\{{}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{t}}\} = \{{}^t \bar{\mathbf{t}}\} + \{\Delta \bar{\mathbf{t}}\}$.

- [3] Cálculo de la matriz de rigidez, dada en (1.11-14) y (1.11-15), de cada elemento finito:

$${}^t \mathbf{K} = {}^t \mathbf{K}_{\text{mat}} + {}^t \mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{{}^t \varphi(\mathbf{B})} \mathbf{B}^T \cdot [{}^t \mathbf{C}^\tau] \cdot \mathbf{B} \frac{d\varphi(\mathbf{B})}{J} + \int_{{}^t \varphi(\mathbf{B})} \boldsymbol{\beta}^T \cdot [{}^t \boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot d\varphi(\mathbf{B})$$

con $[{}^t \boldsymbol{\sigma}]$ dada en (1.11-10), y $[{}^t \mathbf{C}^\tau]$ en (1.11-9), a partir de las definiciones (1.13-13) para materiales hipoelásticos o (1.15-11) para los hiperelásticos.

Ensamblaje de la matriz de rigidez de todo el sistema.

- [4] Imposición de las condiciones de contorno, desplazamientos prescritos, y cálculo de las incógnitas $\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}$ del sistema de ecuaciones (1.2-6) resultante:

$${}^t \mathbf{K} \cdot \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)}$$

siendo (i) la iteración en curso, y:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} = \int_{{}^t \varphi(\mathbf{B})} \mathbf{B}^T \cdot \{{}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}\} \cdot d\varphi(\mathbf{B}), \text{ con } {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \equiv {}^t \boldsymbol{\sigma}$$

- [5] Actualización de los desplazamientos nodales según (1.2-6):

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} \equiv {}^t \hat{\mathbf{u}}$$

- [6] Cálculo del gradiente de deformación (1.4-1) y su determinante (1.4-7):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{I} + \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(i)}}{\partial \mathbf{X}}, \text{ y } {}^{t+\Delta t} J^{(i)} = \det[{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}]$$

- [7] Cálculo del tensor derecho de elongaciones definido en (1.4-5):

- Si el material es hipoelástico:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = \sqrt{({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}}$$

Por descomposición espectral:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot \mathbf{p}^{(j)} \otimes \mathbf{p}^{(j)}, \text{ ó } {}^{t+\Delta t} U_{mn}^{(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot p_m^{(j)} \cdot p_n^{(j)}$$

donde $\lambda^{(j)}$ y $\mathbf{p}^{(j)}$ son los autovalores y autovectores, respectivamente, de $\left[({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)}\right]$; y N es la dimensión del problema.

- Si el material es hiperelástico, de (1.15-1) y (1.15-4):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{E(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} \cdot ({}^t \mathbf{F}^P)^{-1}$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{E(i)} = \sqrt{({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{E(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{E(i)}}$$

Por descomposición espectral:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{E(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot \mathbf{p}^{(j)} \otimes \mathbf{p}^{(j)}, \text{ ó } {}^{t+\Delta t} U_{mn}^{E(i)} = \sum_{j=1}^N \sqrt{\lambda^{(j)}} \cdot p_m^{(j)} \cdot p_n^{(j)}$$

donde $\lambda^{(j)}$ y $\mathbf{p}^{(j)}$ son los autovalores y autovectores, respectivamente, de $\left[({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{E(i)})^T \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{E(i)}\right]$.

- [8] Cómputo del incremento de deformación corrotada según (1.4-23):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)} &= \frac{1}{2} \left[\Delta \mathbf{U}^{(i)} \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{U}^{(i)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^t \mathbf{U}^{(i)}) \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} - {}^t \mathbf{U}^{(i)}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[{}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} \cdot ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} + ({}^t \mathbf{U}^{(i)})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} \right] - \mathbf{I} \end{aligned}$$

Para materiales hiperelásticos corresponde colocar \mathbf{U}^E en lugar de \mathbf{U} .

- [9] Cálculo de la tensión elástica de prueba a partir de (1.13-18) o (1.15-8):

$$\{\Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}\} = [\bar{\mathbf{C}}^{\tau}] \cdot \{\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)}\} \Rightarrow {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)} = {}^t \bar{\boldsymbol{\tau}} + \Delta \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}$$

donde, para problemas bidimensionales, el vector: $\{\Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(i)}\}^T = \{\Delta \bar{\epsilon}_{11} \quad \Delta \bar{\epsilon}_{22} \quad 2\Delta \bar{\epsilon}_{12}\}$, siendo $\Delta \bar{\epsilon}_{ij}$ las componentes del tensor calculado en [2].

- [10] Evaluación de la función de fluencia (1.16-4):

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - \bar{g}(\bar{\mathbf{k}})$$

- Si $\bar{F} < 0 \Rightarrow$ campo elástico, no se corrige la tensión calculada en [9]. Saltar al punto [11].
- Si $\bar{F} \geq 0 \Rightarrow$ campo plástico, se reduce la tensión calculada en [9] a la superficie de fluencia utilizando algún algoritmo de retorno de tensiones (ver sección 3.4), obteniéndose al final del mismo los valores de ${}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{P(i)}$ y ${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}$.

[11] Cálculo del tensor rotación:

- Para materiales hipoelásticos, a partir de (1.4-5):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)})^{-1}$$

- Para materiales hiperelásticos, se actualizan:

el gradiente de deformación plástico definido en (1.15-29):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{\text{P}(i)} = \left[\mathbf{I} + ({}^t \mathbf{U}^{\text{E}})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{P}(i)} \cdot {}^t \mathbf{U}^{\text{E}} \right] \cdot {}^t \mathbf{F}^{\text{P}}$$

el gradiente de deformación elástico dado en (1.15-4):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{\text{E}(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{\text{P}(i)})^{-1}$$

el tensor derecho de elongaciones, de acuerdo al punto [7], y finalmente el tensor rotación dado en (1.15-4):

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{\text{E}(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{\text{E}(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{\text{E}(i)})^{-1}$$

[12] Cálculo de la tensión de Cauchy, según (1.6-11) para materiales hipoelásticos:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t} J^{(i)})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)} \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i)})^T$$

donde ${}^{t+\Delta t} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)}$ es el obtenido de [10]. Para materiales hiperelásticos, según (1.15-5), corresponde utilizar \mathbf{R}^{E} en lugar de \mathbf{R} .

[13] Evaluación del equilibrio del cuerpo mediante el cálculo del residuo \mathfrak{R} (1.11-21):

$${}^{t+\Delta t} \mathfrak{R}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{ext}} - \int_{{}^t \varphi(B)} \mathbf{B}^T \cdot \{ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \} \cdot d\varphi(B)$$

- Si \mathfrak{R} es mayor a un error tolerable preestablecido, se itera a partir del punto [4] haciendo $i=i+1$.
- Si \mathfrak{R} es menor al error tolerable preestablecido, se avanza en el tiempo con el siguiente incremento de carga a partir del punto [2], actualizándose todas las magnitudes: ${}^t(\bullet) = {}^{t+\Delta t}(\bullet)$, siendo ${}^{t+\Delta t}(\bullet)$ la magnitud calculada en la última iteración, y la configuración deformada de referencia pasa a ser la geometría recientemente equilibrada:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{x} = \mathbf{X} + {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}$$

3.3 PROCEDIMIENTO DE CALCULO PARA MATERIALES POROSOS SATURADOS.

El procedimiento de cálculo para suelos saturados es básicamente el mismo al descrito en la sección anterior, con algunas modificaciones menores en los puntos que a continuación se detallan:

- [2] Progreso del tiempo un paso Δt (tiempo actual = $t+\Delta t$) con un incremento de los vectores de cargas definidos en (2.7-5) y (2.7-10):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{N}^u)^T \cdot \{{}^{t+\Delta t}\mathbf{b}\} \cdot \rho \cdot d\varphi(\mathcal{B}) + \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{N}^u)^T \cdot \{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{t}}\} \cdot d\partial\varphi(\mathcal{B})$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\nabla\mathbf{N}^p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla(\gamma \cdot z) \cdot d\varphi(\mathcal{B}) + \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{N}^p)^T \cdot \bar{\mathbf{v}}_n^w \cdot d\partial\varphi(\mathcal{B})$$

$$\text{con: } \{{}^{t+\Delta t}\mathbf{b}\} = \{{}^t\mathbf{b}\} + \{\Delta\mathbf{b}\} \text{ y } \{{}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{t}}\} = \{{}^t\bar{\mathbf{t}}\} + \{\Delta\bar{\mathbf{t}}\}.$$

- [3] Cálculo, a nivel de cada elemento finito, de la matriz de rigidez (2.7-3):

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{K} = & \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{B}^u)^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^\tau] \cdot \mathbf{B}^u \frac{d\varphi(\mathcal{B})}{J} + \\ & + \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\boldsymbol{\beta}^u)^T \cdot [{}^t\boldsymbol{\sigma}] \cdot \boldsymbol{\beta}^u \cdot d\varphi(\mathcal{B}) - \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^{\tau j}] \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \right) \cdot {}^t p \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{B}^u \cdot d\varphi(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

y de las matrices de flujo (2.7-7), (2.7-8) y (2.7-9):

$${}^t\mathbf{S}_1 = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{N}^p)^T \cdot s \cdot \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(\mathcal{B})$$

$${}^t\tilde{\mathbf{L}} = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot [{}^t\mathbf{C}^{\tau j}] \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \right) \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{N}^p \cdot d\varphi(\mathcal{B})$$

$${}^t\mathbf{H} = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\nabla\mathbf{N}^p)^T \cdot \mathbf{k} \cdot \nabla\mathbf{N}^p \cdot d\varphi(\mathcal{B})$$

Y ensamblaje del sistema acoplado para todo el conjunto de elementos finitos.

- [4] Imposición de las condiciones de contorno, desplazamientos y presiones de poro prescritos, y cálculo de las incógnitas $\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$ y $\Delta\hat{p}^{(i)}$ del sistema de ecuaciones acoplado dado en (2.7-15):

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K} & -{}^t\tilde{\mathbf{L}} \\ -{}^t\tilde{\mathbf{L}}^T & -({}^t\mathbf{S}_1 + \Theta.\Delta t.{}^t\mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \Delta\hat{\mathbf{p}}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta t.{}^t\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\hat{\mathbf{u}} \\ {}^t\hat{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \\ \Delta\tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}}^{(i)} \end{Bmatrix}$$

siendo (i) la iteración en curso, y:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} = \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}\} d\varphi(\mathcal{B})$$

donde ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ es la tensión total de la iteración anterior calculada [12].

[5] Actualización de los desplazamientos y presiones de poro nodales:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(0)} \equiv {}^t\hat{\mathbf{u}}$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{(i-1)} + \Delta\hat{\mathbf{p}}^{(i)}, \text{ con } {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{(0)} \equiv {}^t\hat{\mathbf{p}}$$

Los puntos [6], [7], [8], [9], [10] y [11] del procedimiento de la sección anterior son los mismos para el caso del material suelo saturado, teniendo en cuenta que la tensión calculada en [9] corresponde a la fase sólida (tensión efectiva), y que en el punto [10] se utiliza la función de fluencia definida en (2.8-14) y (2.8-15):

$$\bar{F}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) - \bar{g}(\bar{k}) = J^{-1} \frac{\bar{p}' + \bar{a}}{2} \left[\left(\frac{\bar{q}}{\bar{p}' + \bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} + 1 \right] - p_{co} = 0$$

[12] Cálculo de las tensiones totales. De (2.3-12):

$${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}'^{(i)} - {}^{t+\Delta t}J^{(i)} \bar{\alpha} \cdot {}^{t+\Delta t}p^{(i)} \cdot \mathbf{m}$$

con ${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}'^{(i)}$ obtenido de [10]. Y a partir de (2.7-17) para materiales hipoeelásticos:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t}J^{(i)})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i)} \cdot {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(i)} \cdot ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i)})^T$$

Para materiales hiperelásticos, según (1.15-5), corresponde utilizar \mathbf{R}^E en lugar de \mathbf{R} .

[13] Evaluación del equilibrio del cuerpo mediante el cálculo del residuo \mathfrak{R} (2.7-16):

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}^{(i)} = \left\{ \begin{matrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \Delta t.{}^t\mathbf{H}.{}^t\hat{\mathbf{p}} + \Delta\tilde{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \int_{{}^t\varphi(\mathcal{B})} (\mathbf{B}^u)^T \cdot \{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\} d\varphi(\mathcal{B}) \\ -{}^t\tilde{\mathbf{L}}^T \cdot ({}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^t\hat{\mathbf{u}}) - ({}^t\mathbf{S}_1 + \Theta.\Delta t.{}^t\mathbf{H}) \cdot ({}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{(i)} - {}^t\hat{\mathbf{p}}) \end{matrix} \right\}$$

Y al igual que en la sección anterior:

- Si \mathfrak{R} es mayor a un error preestablecido, se itera a partir del punto [4] haciendo $i=i+1$.
- Si \mathfrak{R} es menor al error preestablecido, se avanza en el tiempo con el siguiente incremento de carga a partir del punto [2], actualizándose todas las magnitudes: ${}^t(\bullet) = {}^{t+\Delta t}(\bullet)$, siendo ${}^{t+\Delta t}(\bullet)$ la magnitud calculada en la última iteración, y la configuración deformada de referencia pasa a ser la geometría recientemente equilibrada: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = \mathbf{X} + {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}$.

3.4 ALGORITMO DE RETORNO PLANO CORTANTE.

En este trabajo se utilizó el Algoritmo Plano Cortante (ver Simo – Hughes 1998, pag. 149) para el retorno de las tensiones a la superficie de fluencia, que consiste en:

- a) Se inicializa: $k = 0$ (iteración plástica), y ${}^{t+\Delta t}\Delta\Lambda^{(0)} = 0$.

Nótese que en la notación se reemplazó el superíndice de la iteración de equilibrio (i) por el de la iteración plástica (k), estando comprendido un proceso iterativo plástico completo dentro de cada iteración de equilibrio.

- b) Se computa, de acuerdo al criterio de fluencia utilizado, la función de fluencia ${}^{t+\Delta t}\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})^{(k)}$, la dirección del flujo plástico ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)}$, y el módulo plástico ${}^{t+\Delta t}A^{(k)}$.

- c) Se calcula el multiplicador plástico:

$$\delta^2\Lambda^{(k)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{f}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\bar{g}^{(k-1)}}{({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)})^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}A^{(k)}}$$

- d) Se actualiza el límite de fluencia:

$${}^{t+\Delta t}\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})^{(k-1)} + \delta^2\Lambda^{(k)} \cdot {}^{t+\Delta t}A^{(k)}$$

- e) Se calcula el verdadero multiplicador plástico para esta iteración:

$$\Delta^2\Lambda^{(k)} = \frac{{}^{t+\Delta t}\bar{f}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}\bar{g}^{(k)}}{({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)})^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}A^{(k)}}$$

Si este módulo es menor que un cierto error preestablecido, vale decir que:

$${}^{t+\Delta t}\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\mathbf{k}}) = {}^{t+\Delta t}\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) - {}^{t+\Delta t}\bar{g}(\bar{\mathbf{k}}) \cong 0$$

entonces finaliza el algoritmo. Sino, se continúa con el punto f).

- f) Se actualiza las variables:

$${}^{t+\Delta t}\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^P{}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^P{}^{(k-1)} + \Delta^2\Lambda^{(k)} \cdot {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{a}}^{(k)}$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta\Lambda^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\Delta\Lambda^{(k-1)} + \Delta^2\Lambda^{(k)}$$

- g) Se computa las tensiones:

$${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}} - [\bar{\mathbf{C}}^\tau] \cdot {}^{t+\Delta t}\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^P{}^{(k)}$$

siendo ${}^{t+\Delta t}\bar{\boldsymbol{\tau}}$ la tensión elástica de prueba calculada en el punto [9] (secciones 3.2 y 3.3).

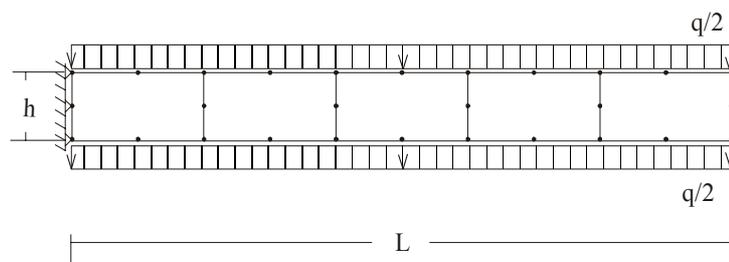
- h) Se hace $k = k+1$, y se reinicia el algoritmo a partir del punto b).

Al finalizar las iteraciones para el equilibrio del paso de tiempo actual, es decir cuando \mathfrak{R} es menor al error tolerable preestablecido (ver punto [13] de las secciones 3.2 y 3.3), se inicializa el incremento de deformaciones plásticas: ${}^{t+\Delta t}\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \mathbf{0}$.

3.5 EJEMPLO 1: VOLADIZO CON CARGA DISTRIBUIDA.

El voladizo en estudio, mostrado en la Figura 3-I, es discretizado con cinco elementos finitos de ocho nodos y resuelto en estado plano de tensiones bajo una carga vertical uniformemente distribuida. La viga es asumida de sección cuadrada, de material isotrópico y elástico, por lo que el límite de fluencia es considerado lo suficientemente alto como para evitar cualquier respuesta plástica.

El propósito de este ejemplo es comparar los resultados, para grandes deformaciones, de las formulaciones de Bathe – Ozdemir (1976, pag. 88) con los de esta Tesis. En la Figura 3-II se puede apreciar la coincidencia de las respuestas de ambos trabajos. A efectos de independizar los valores del sistema de unidades utilizado, en el eje vertical se representa la relación descenso del extremo libre dividido la longitud actualizada L , y en el eje horizontal, el parámetro de carga $K = q.L^3 / E.I$, correspondientes a cada paso de carga. Para obtener la solución completa se han utilizado en este trabajo 20 pasos o incrementos iguales de carga.



Datos del problema:

Módulo de elasticidad: $E = 1,2 \times 10^4 \text{ lb/in}^2 = 82740 \text{ kN/m}^2$

Módulo de Poisson: $\nu = 0,2$

Sección: $b \times h = 1 \text{ in} \times 1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm} \times 2,54 \text{ cm}$

Inercia: $b \times h^3 / 12 = 0,08333 \text{ in}^4 = 3,4686 \text{ cm}^4$

Longitud inicial: $L_0 = 10 \text{ in} = 0,254 \text{ m}$

Carga distribuida: q (kN/m)

Descenso vertical extremo libre: d (m)

Figura 3-I: Voladizo con carga distribuida. Malla de elementos finitos y datos.

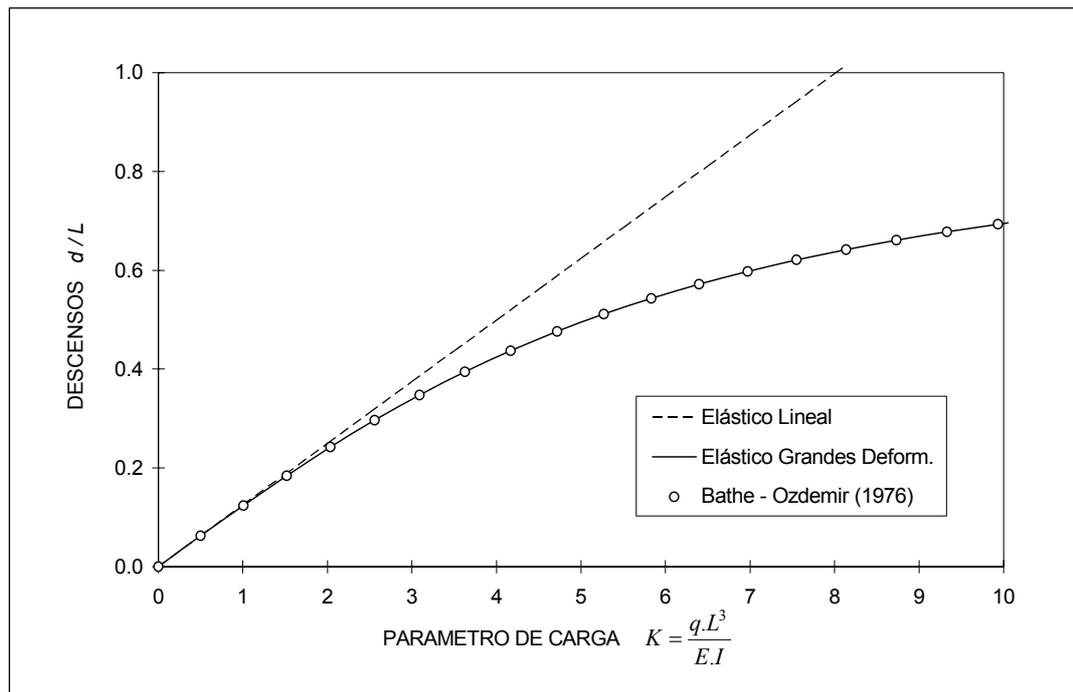
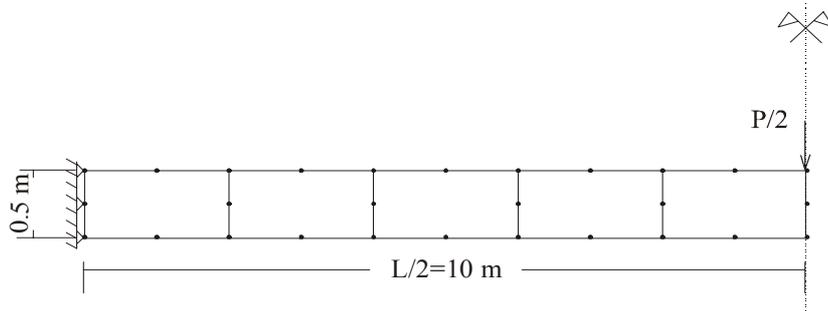


Figura 3-II: Respuesta elástica no lineal del voladizo.

3.6 EJEMPLO 2: VIGA BIEMPOTRADA HIPERELASTOPLASTICA.

Este es un ejemplo típico estructural, plano de tensiones, extensamente publicado, que sirve para validar los resultados del modelo desarrollado en esta Tesis. Se realiza un análisis hiperelastoplástico de una viga empotrada en ambos extremos y que soporta una carga puntual en el centro de su luz. Las dimensiones de la viga son: sección rectangular de 0,092 m x 0,50 m, y 20 m de longitud. Debido a la simetría del problema, se representa la mitad de la viga con una malla de 5 elementos finitos de 8 nodos, la que se muestra, junto a otros datos, en la Figura 3-III.

El criterio de plastificación utilizado es el de Von Mises, con un parámetro de endurecimiento $H' = 4 \times 10^6$ para el análisis de pequeñas deformaciones, y $H' = 0$ (plasticidad perfecta) para el de grandes deformaciones.



Datos del problema:

Módulo de elasticidad: $E = 1,2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$

Módulo de Poisson: $\nu = 0,3$

Tensión de fluencia: $g = \sigma_y = 3,0 \times 10^4 \text{ t/m}^2$

Carga: $P = 500 \text{ t}$

Longitud: $L = 20 \text{ m}$

Figura 3-III: Viga biempotrada. Malla de elementos finitos y datos.

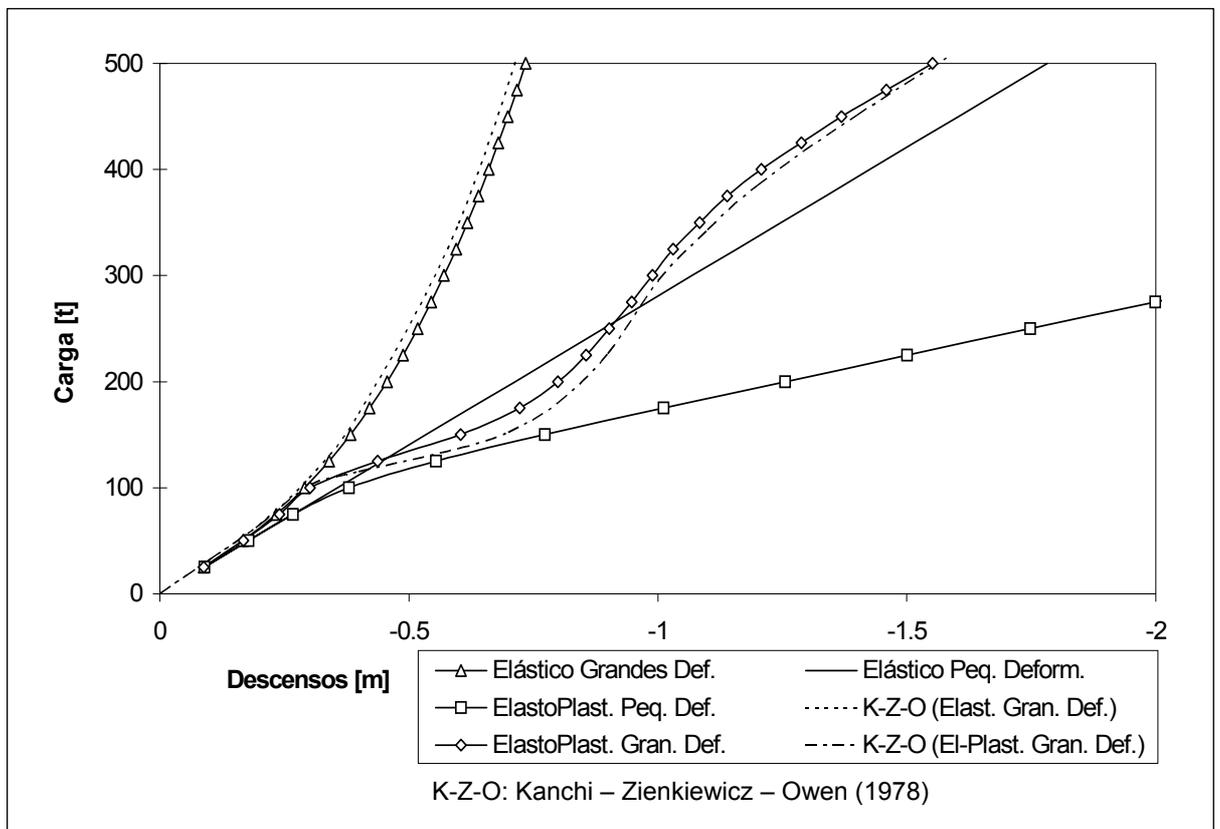


Figura 3-IV: Descensos del centro de la viga.

En la Figura 3-IV se representan las curvas de descensos del centro de la viga, para distintas intensidades de carga, correspondientes a los distintos análisis. Se puede apreciar la diferencia en la respuesta según cada una de las no linealidades (de material y/o geométrica) consideradas. En el caso del análisis elastoplástico con grandes deformaciones se observa claramente la transición entre un comportamiento a flexión pura y un comportamiento a flexotracción generado por la deformación de la viga. En la misma Figura se graficaron los resultados obtenidos por Kanchi – Zienkiewicz – Owen (1978, pag. 175) para el análisis, tanto elástico como elastoplástico, de grandes deformaciones. Mediante la comparación gráfica se puede apreciar la gran aproximación de los resultados obtenidos por el modelo hiperelastoplástico de esta Tesis.

3.7 EJEMPLO 3: CONSOLIDACION ELASTICA UNIDIMENSIONAL.

Se hace el análisis dentro del campo elástico de un suelo saturado inicialmente libre de tensiones. La malla de elementos finitos está representada por una columna de 10 elementos rectangulares en la Figura 3-V. Se trata de un problema en estado plano de deformaciones, cuyas condiciones de contorno son: base impermeable con desplazamientos restringidos en ambos sentidos, laterales verticales impermeables con desplazamiento horizontal restringido, y superficie cargada con sobrepresiones de poro nulas a lo largo de todo el proceso de deformación.

Módulo de elasticidad: $E = 100 \text{ kPa}$
 Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,3$
 Permeabilidad vertical: $k_v = 8,64 \cdot 10^{-4} \text{ m/día}$
 Peso específico del agua: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$
 Cohesión: $c = 100 \text{ kPa}$
 Angulo fricción interna: $\phi = 10^\circ = 0,1745 \text{ rad.}$
 A: punto donde se mide la presión de poros.

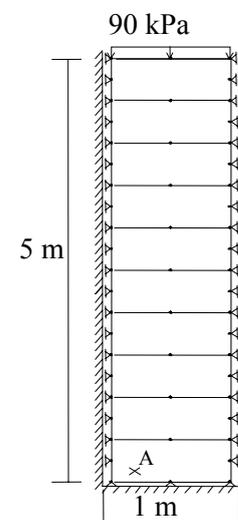


Figura 3-V: Consolidación unidimensional. Datos y malla de elementos finitos.

Los datos del tipo de suelo, mostrados junto a la geometría inicial en la Figura 3-V, si bien no corresponden a un suelo típico de la región Nordeste Argentino, fueron tomados de la publicación de Borja – Tamagnini – Alarcón (1998) a efectos de poder comparar los resultados obtenidos. En cuanto a la carga, consiste en una compresión uniforme de 90 kPa aplicada en forma instantánea en la parte superior de la columna de suelo.

En la Figura 3-VI se aprecian las curvas de consolidación que representan la presión de poros total, en el eje vertical, contra el tiempo, en escala logarítmica en el eje horizontal. La medición de las presiones de poro se realiza en el punto de Gauss A (mostrado en la Figura 3-V) cercano al fondo de la columna de suelo. La presión de poros total es igual a la presión hidrostática mas la sobrepresión generada por la carga en superficie, así, la presión total inicial de 140 kPa es el resultado de sumar 50 kPa de la presión hidrostática inicial y 90 kPa de la carga instantánea en superficie. En la Figura 3-VI se contrastan los resultados de los análisis lineal (pequeñas deformaciones) y no lineal geométrico (grandes deformaciones). Los valores finales de presión de poros son las presiones hidrostáticas finales, correspondientes con la altura final de la columna de suelo, esto es, 5 m para el análisis lineal, y 3,24 m para el análisis no lineal. En la misma Figura se puede apreciar la gran coincidencia de los resultados de esta Tesis con los obtenidos por Borja – Tamagnini – Alarcón (1998, pag. 110).

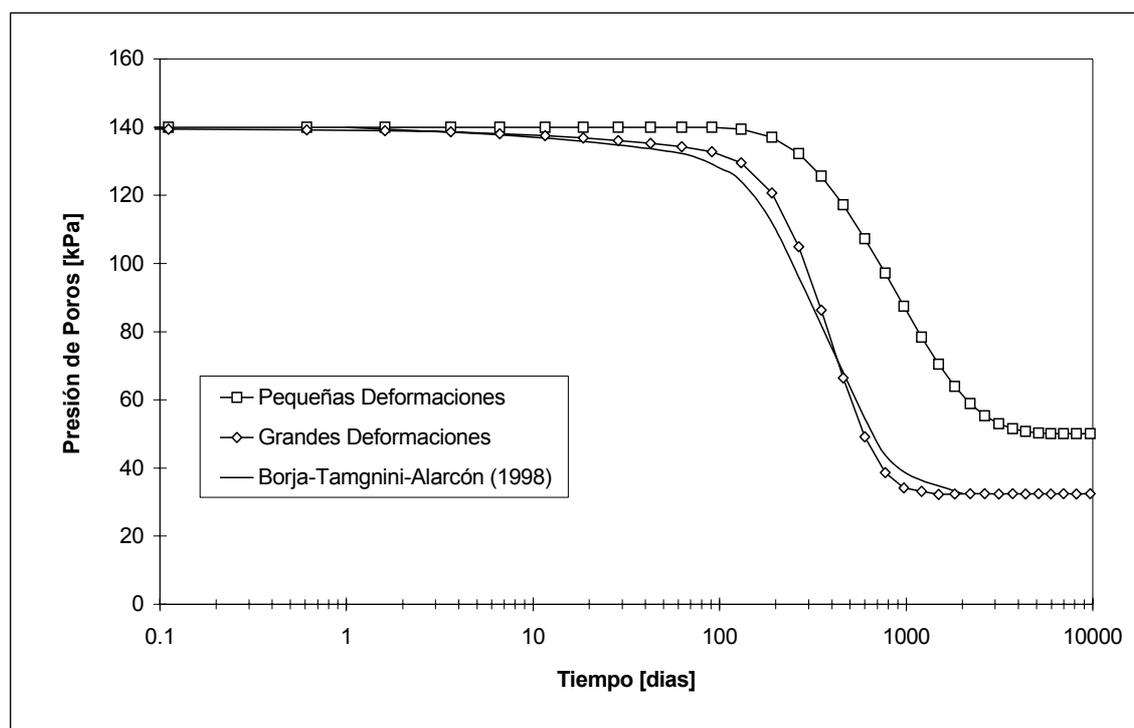


Figura 3-VI: Curvas de consolidación.

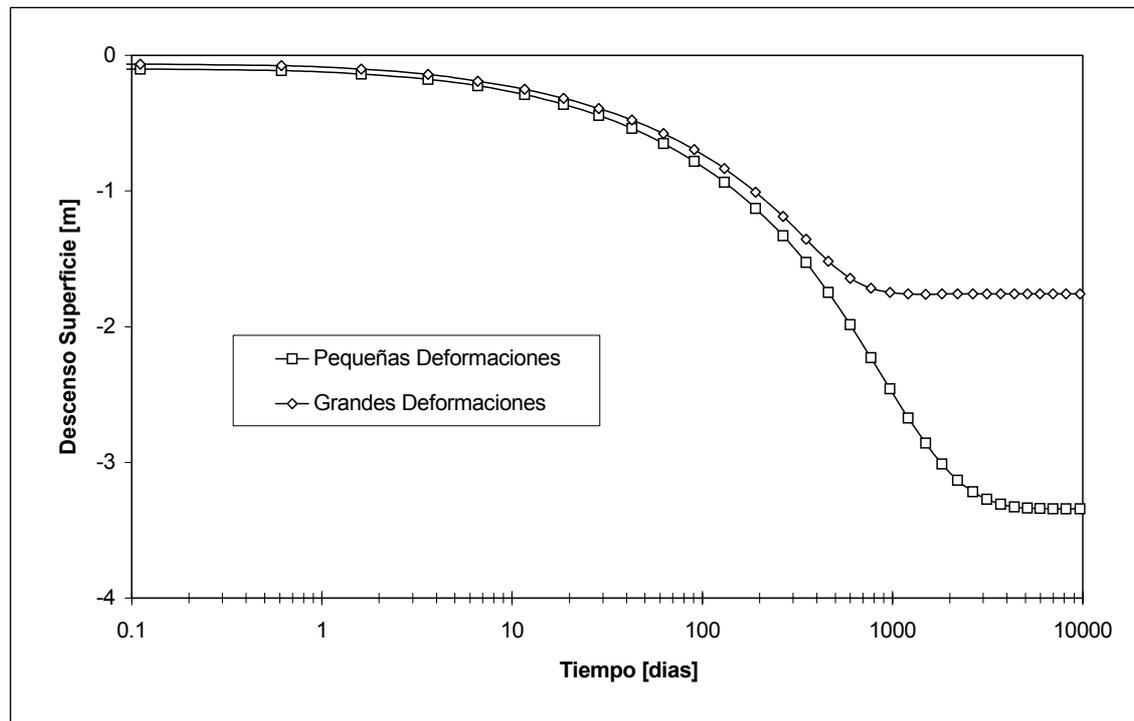


Figura 3-VII: Asentamiento de la superficie.

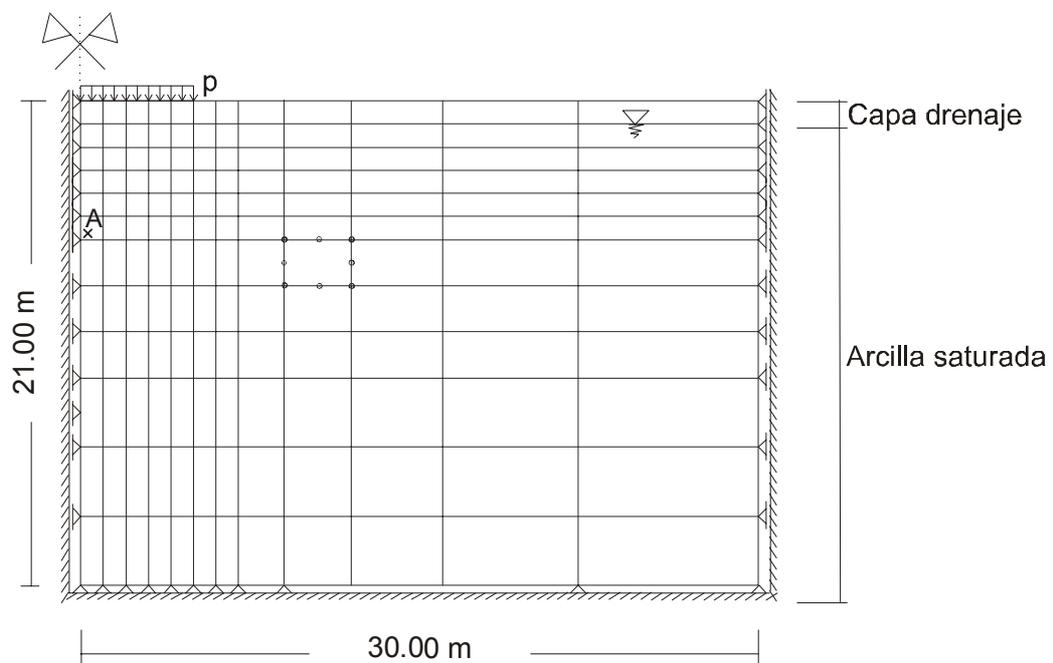
La Figura 3-VII grafica los descensos de superficie, en el eje vertical, contra el tiempo, en escala logarítmica en el eje horizontal. Se observa que para el análisis lineal se obtiene un asentamiento total de 3,34 m, en tanto para el análisis no lineal geométrico, el asentamiento total resulta de 1,76 m. A pesar de la gran magnitud del asentamiento, es sabido que el análisis lineal no lleva en cuenta la variación de la geometría a lo largo de la deformación, obteniéndose en consecuencia los 50 kPa de la presión hidrostática final de la Figura 3-VI.

3.8 EJEMPLO 4: CONSOLIDACION ELASTOPLASTICA BIDIMENSIONAL.

En este ejemplo se analiza el problema de una zapata flexible de 10 m de ancho y longitud infinita (estado plano de deformaciones), apoyada sobre una capa de 1 m de espesor de material drenante, que descansa sobre un estrato de 20 m de profundidad de arcilla saturada compresible. La capa de drenaje se considera que permanece en el campo elástico a lo largo de todo el proceso de carga. La arcilla, en cambio, es supuesta con distintos estados de pre-consolidación inicial, que generan mayor rigidez en la respuesta del suelo cuando es sometido

a recargas posteriores, y con un comportamiento elastoplástico, siguiendo el criterio de plasticificación de Estados Críticos Modificado, cuando es sometida a cargas superiores a dichas presiones de preconsolidación.

Las características físicas, tanto de la capa drenante como de la arcilla, aunque no corresponden a las de suelos de la región Nordeste Argentino, fueron adoptadas para poder visualizar las diferencias entre los resultados de los análisis de pequeñas y grandes deformaciones, forzando al modelo matemático no lineal a resolver problemas con verdaderamente grandes deformaciones, y para posibilitar además la comparación de los resultados aquí obtenidos con los de otras publicaciones.



Propiedades de los materiales:

Módulo de elasticidad	CAPA DRENAJE: $E = 1000 \text{ kPa}$	ARCILLA: $E = 500 \text{ kPa}$
Módulo de Poisson	$\nu = 0,0$	$\nu = 0,4$
Peso específico	$\gamma = 2 \text{ tn/m}^3$	$\gamma = 2 \text{ tn/m}^3$
Fricción interna	$\phi = 30^\circ = 0,5236 \text{ rad}$	$\phi = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$
Cohesión	$c = 10 \text{ kPa}$	$c = 50 \text{ kPa}$
Relación inicial de vacíos	$e_0 = 1,0$	$e_0 = 2,0$
Compresibilidad de los granos	$k_s = 1 \cdot 10^6 \text{ kPa}$	$k_s = 1 \cdot 10^6 \text{ kPa}$
Permeabilidad horizontal	$k_h = 1 \cdot 10^2 \text{ m/día}$	$k_h = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m/día}$
Permeabilidad vertical	$k_v = 1 \cdot 10^2 \text{ m/día}$	$k_v = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m/día}$
Pendiente L.N.C. en plano $v - \ln p'$	-	$\omega = 0,40$
Pend. línea recarga en plano $v - \ln p'$	-	$K = 0,10$
Variable de endurecimiento	-	$\beta = 0,50$

Figura 3-VIII: Fundación corrida. Malla elementos finitos y propiedades materiales.

La malla de elementos finitos, su geometría inicial, y las características de los dos tipos de suelo utilizados son mostrados en la Figura 3-VIII, donde además puede observarse que tanto el fondo de la malla como los bordes laterales son considerados impermeables, lo que obliga a que el drenaje se produzca solo a través del límite superior o superficie libre. Entre las características del material figuran los coeficientes ω , K y β utilizados por el criterio de Estados Críticos Modificado, cuya interpretación física puede verse en la sección 2.8.

En principio el suelo es sometido a un estado tensional variable con la profundidad, representado en la Figura 3-IX. Se trata de tensiones iniciales en equilibrio, generadas por peso propio. Posteriormente se somete toda la masa a cargas de superficie que producen tres estados de preconsolidación, ${}^0 p_{co} = 50$ kPa, 25 kPa, y cero (normalmente consolidado). Estos estados tensionales iniciales son los utilizados para analizar las distintas respuestas de la masa de suelo cuando es sometida a una sobrecarga de superficie.

La sobrecarga de superficie, de intensidad $p = 120$ kPa, es aplicada a tasa constante en un periodo de 90 días, luego del cual es mantenida constante. Este periodo de tiempo es mucho menor que el requerido para alcanzar la consolidación total, y por lo tanto el suelo se comporta esencialmente como no drenado durante la aplicación de la carga.

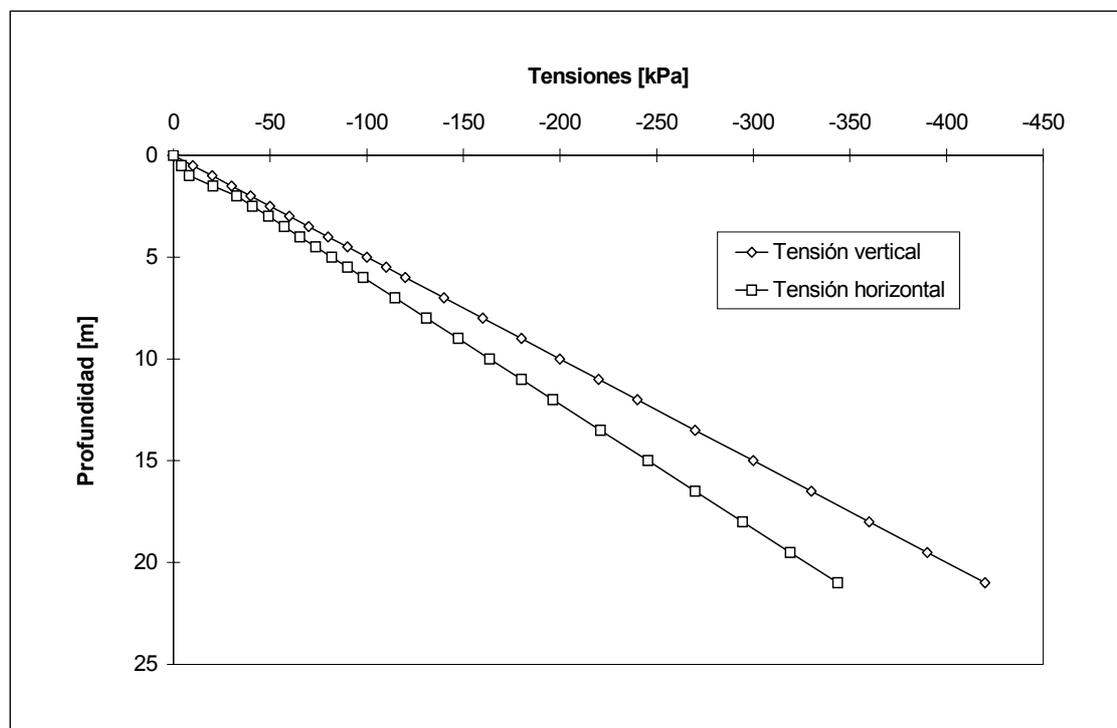


Figura 3-IX: Estado tensional inicial debido a peso propio.

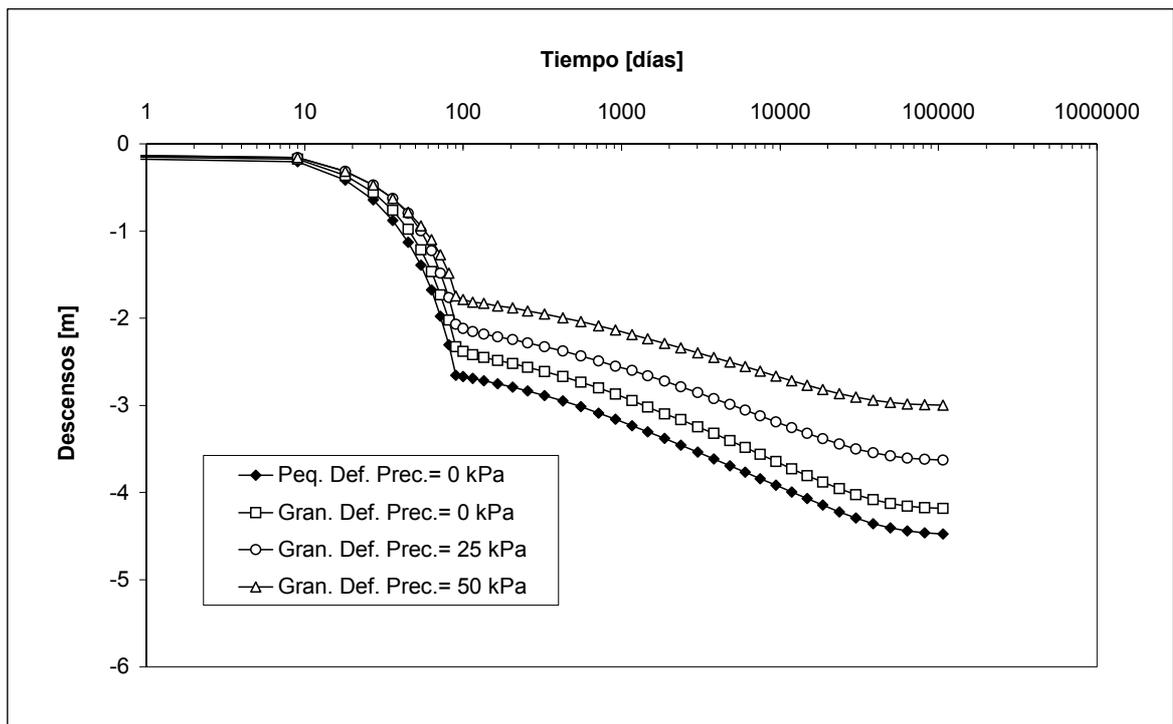


Figura 3-X: Evolución de asentamientos en el punto medio de la superficie.

En la Figura 3-X se muestra la evolución en el tiempo de los desplazamientos verticales de la superficie del suelo en correspondencia con el eje de simetría del problema. Se incluyen las curvas del análisis de grandes deformaciones (no linealidad geométrica) para los distintos grados de preconsolidación, y del análisis de pequeñas deformaciones para el caso de consolidación normal. Como es esperado, los análisis de grandes deformaciones predicen menores valores de asentamientos respecto al análisis de pequeñas deformaciones, disminuyendo además los desplazamientos a medida que aumenta la preconsolidación.

La evolución en el tiempo de la presión de poros es mostrada en la Figura 3-XI. El punto en el cual se miden estos valores está indicado con la letra A en la Figura 3-VIII. Nótese que la solución de grandes deformaciones predice menores sobrepresiones de poro, respecto a la solución de pequeñas deformaciones, a lo largo de todo el proceso, con un estado final correspondiente a la presión hidrostática (sobrepresión nula) del punto de medición, que lleva en cuenta la deformación finita de la capa de suelo por encima de dicho punto.

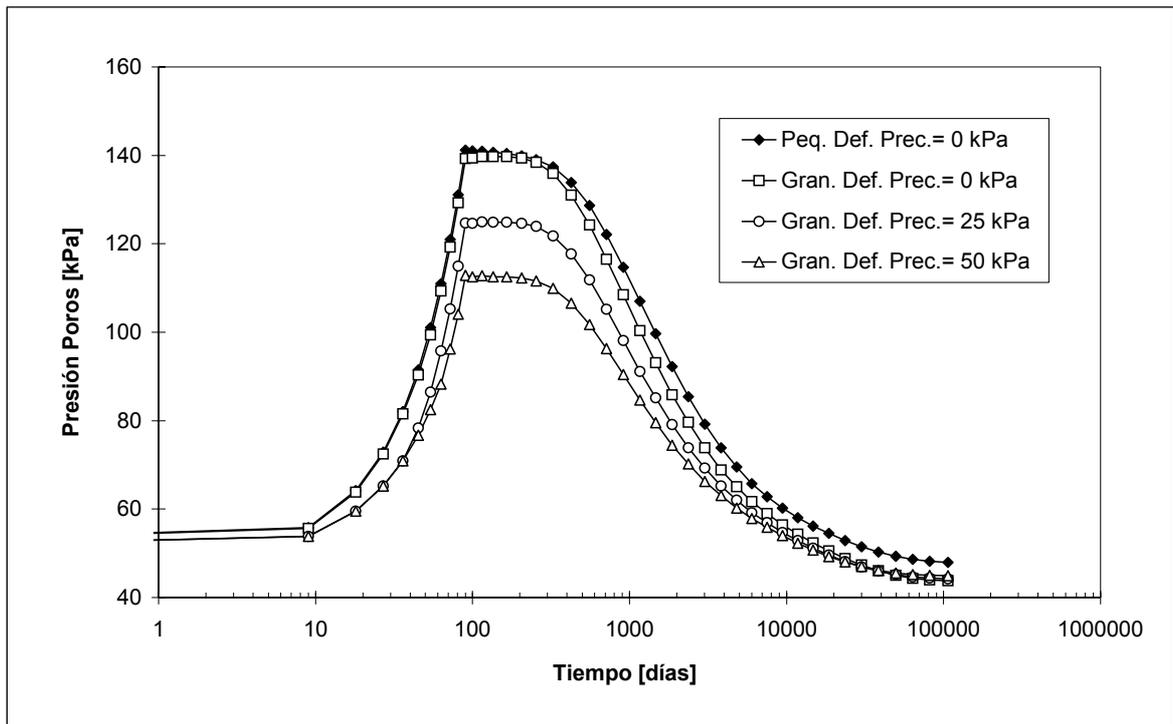


Figura 3-XI: Curvas de consolidación. Presiones de poro en el punto A.

Los picos de presión de poro coinciden con el momento en que se produce la suspensión del incremento de la carga de superficie, a los 90 días. Nuevamente se han considerado los casos de preconsolidaciones iniciales de 0, 25 y 50 kPa para los análisis de grandes deformaciones, y de consolidación normal para el análisis de pequeñas deformaciones. Para los cuatro casos analizados puede observarse que el proceso total de consolidación (disipación total de la sobrepresión de poros) dura aproximadamente 100000 días, aunque se aprecia, como es lógico, que este tiempo tienda a disminuir en los casos en que se generan menores deformaciones, es decir con mayores preconsolidaciones iniciales.

Como es usual en los problemas de Mecánica de Suelos, también se presentan las trayectorias de tensiones, donde se grafica p' (primer invariante de las tensiones efectivas de Cauchy) en el eje de abscisas versus q (raíz cuadrada del segundo invariante de las tensiones desviadoras de Cauchy) en el eje de ordenadas.

En la Figura 3-XII se representan las trayectorias de las tensiones efectivas de Cauchy del punto de Gauss A (ver Figura 3-VIII), correspondientes al análisis de pequeñas deformaciones, considerando los tres grados de preconsolidación inicial utilizados anteriormente para

el análisis no lineal geométrico, esto es: ${}^0 p_{co} = 0, 25 \text{ y } 50 \text{ kPa}$. Por supuesto, en los casos de suelos preconsolidados el comportamiento es inicialmente elástico, entrando al campo plástico recién cuando las tensiones efectivas alcancen, debido al incremento de la sobrecarga de superficie, el valor de la preconsolidación. La sobrecarga es soportada en primera instancia por el fluido de los poros, manteniéndose muy pequeño el valor de las tensiones efectivas debido a la baja permeabilidad del medio poroso en estudio y a la rápida aplicación de la carga. A partir del momento en que la sobrecarga de superficie permanece constante, se puede observar como las trayectorias de las tensiones efectivas se desplazan hacia la derecha debido a la disipación de las presiones de poro.

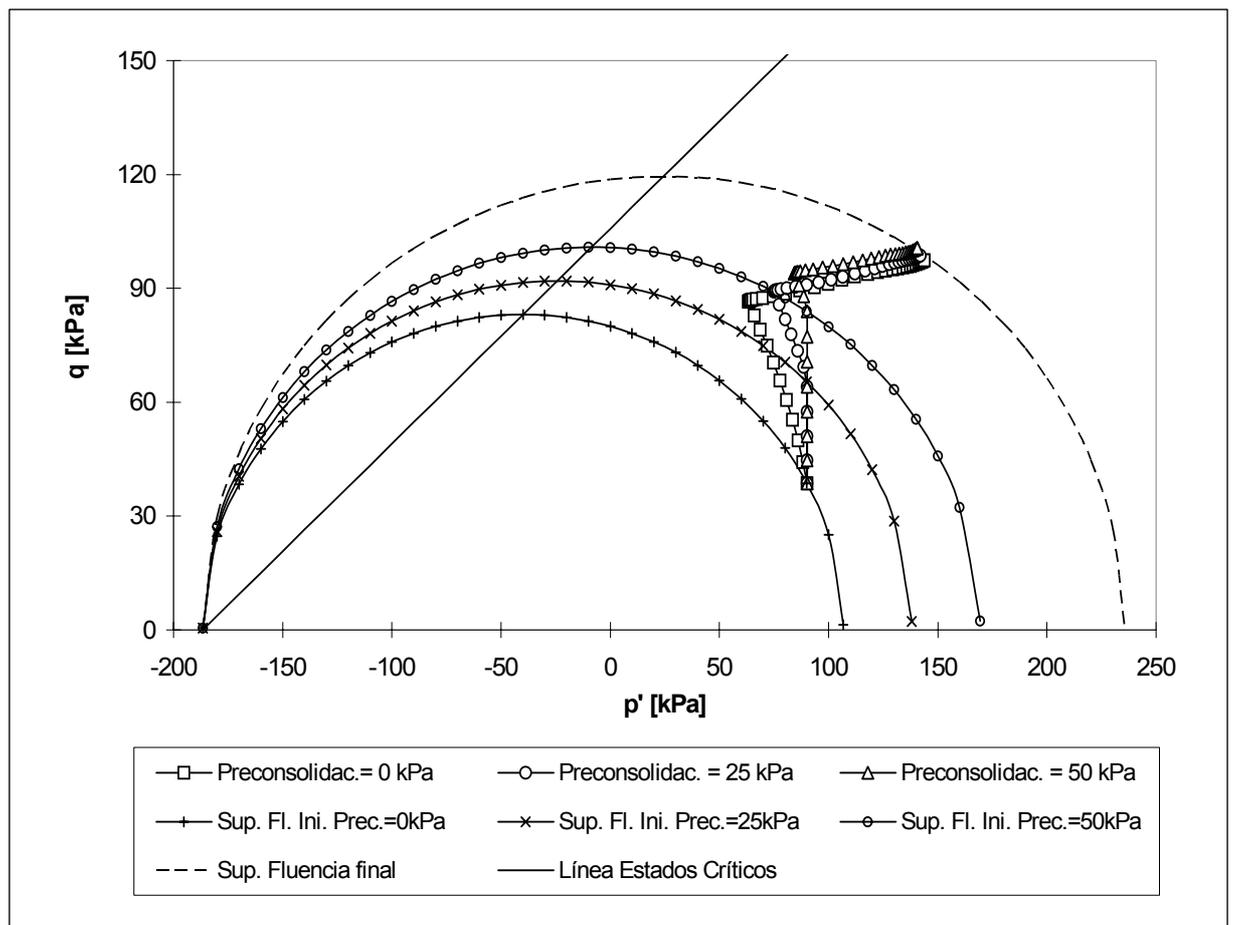


Figura 3-XII: Trayectorias de tensiones efectivas para pequeñas deformaciones.

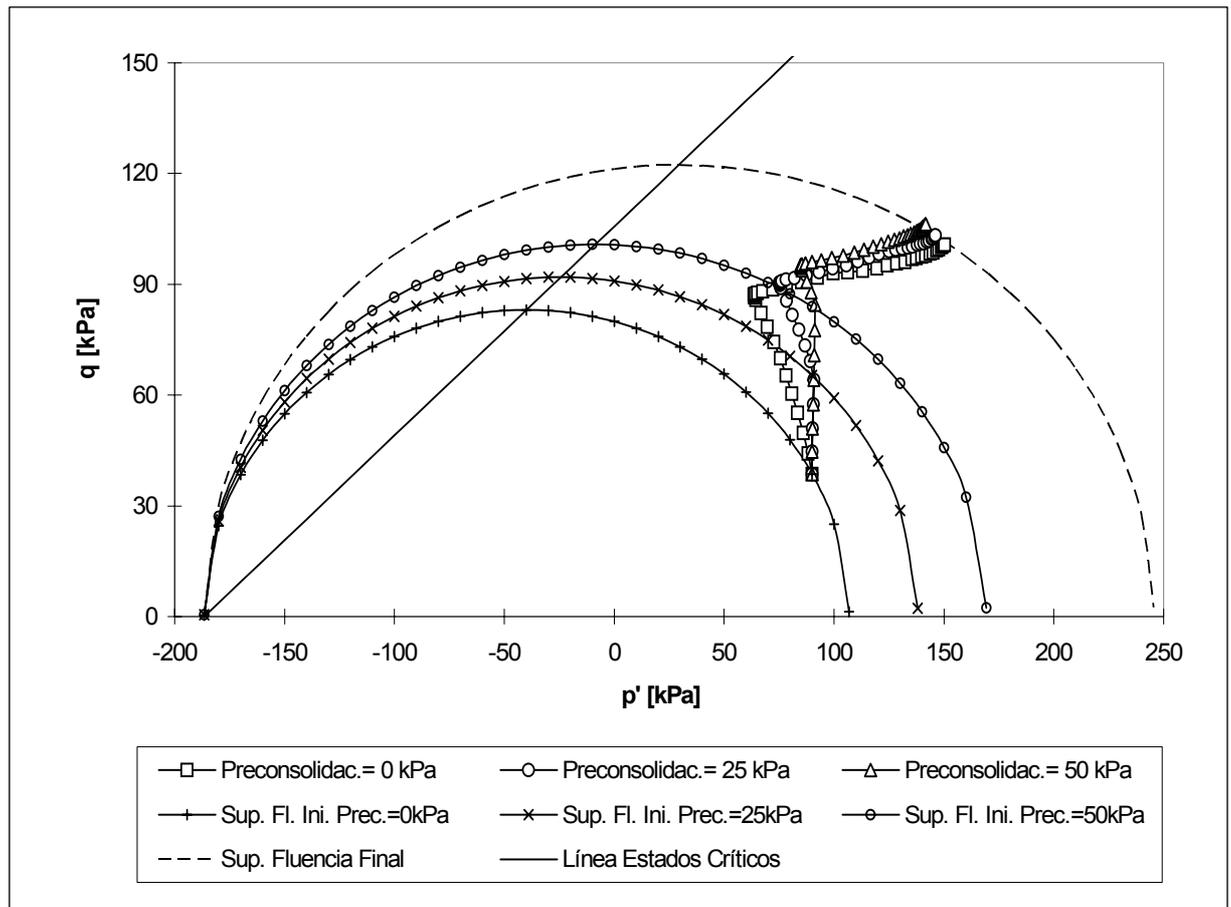


Figura 3-XIII: Trayectorias de tensiones efectivas para grandes deformaciones.

En la Figura 3-XIII se representan, en el plano $p' - q$, las trayectorias de las tensiones efectivas de Cauchy, del mismo punto A, correspondientes al análisis de grandes deformaciones, considerando los tres grados de preconsolidación inicial, es decir ${}^0 p_{co} = 0, 25$ y 50 kPa. Nuevamente, para los casos con algún grado de preconsolidación, el comportamiento del suelo es inicialmente elástico, entrando al campo plástico recién cuando las tensiones efectivas alcanzan el correspondiente valor de preconsolidación inicial. En ambos estados, elástico y plástico, el recorrido descrito por las trayectorias de tensiones es similar al análisis de pequeñas deformaciones.

En las Figura 3-XII y Figura 3-XIII se aprecia como inicialmente, durante la aplicación de la sobrecarga de superficie, las trayectorias de tensiones se acercan a línea de estados críticos para luego, durante el proceso de consolidación, alejarse de la misma moviéndose hacia la derecha del gráfico. La consolidación genera una compactación del esqueleto sólido del suelo,

en consecuencia el suelo experimenta una ganancia de la resistencia al corte, lo cual se evidencia por el alejamiento de la trayectoria de tensiones de la línea de estados críticos. Las superficies de fluencias son expandidas desde cada valor inicial, según el estado de preconsolidación en cuestión, hasta una superficie de fluencia final que es prácticamente similar para los tres grados de preconsolidación analizados.

El ejemplo presentado en esta sección es similar al publicado por Borja – Tamagnini-Alarcón (1998, pag. 116 a 121), siendo posible realizar una comparación cualitativa de los resultados aquí mostrados con los de dicha publicación.

El criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado, utilizado en este trabajo, introduce un coeficiente β (ver sección 2.8) variable con el grado de endurecimiento del suelo. La influencia de este coeficiente está mostrada en la Figura 3-XIV, donde se comparan los descensos de la superficie del suelo, en el eje de simetría del problema, para distintos valores del coeficiente β .

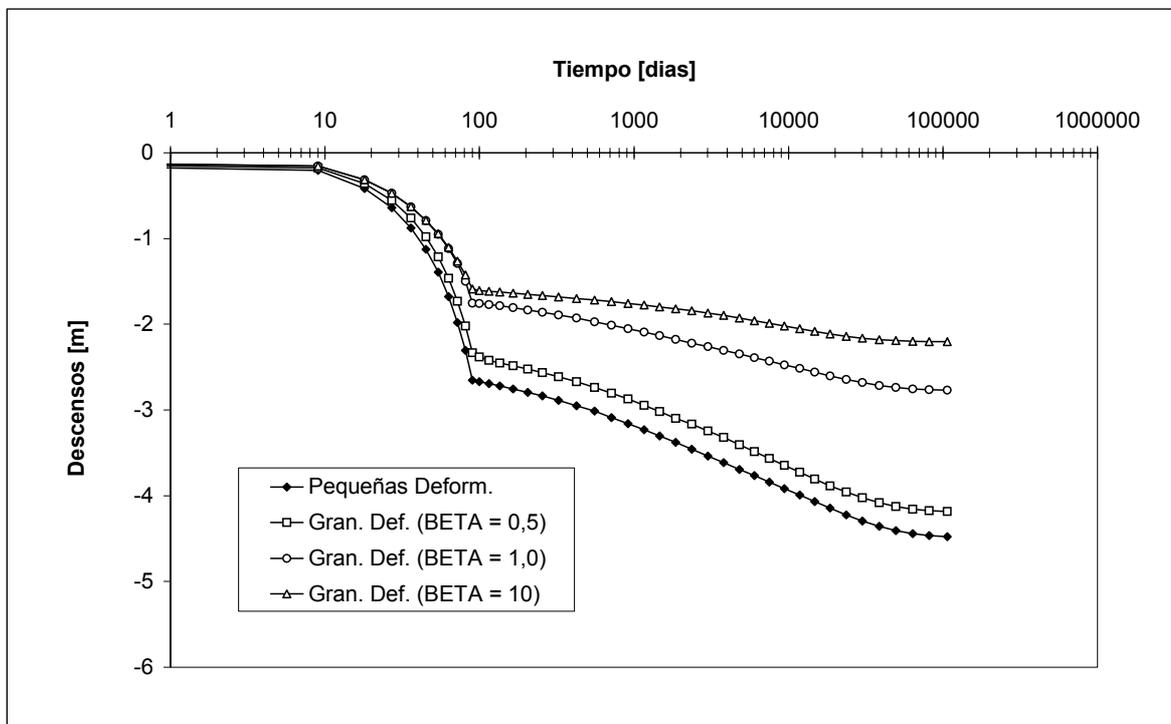
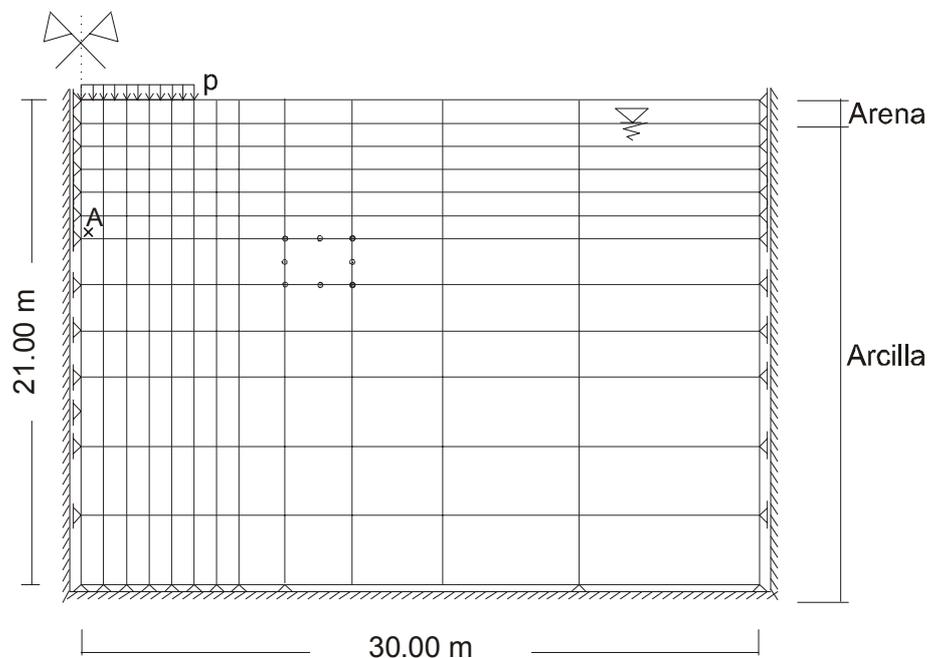


Figura 3-XIV: Influencia del grado de endurecimiento en los asentamientos (medido a través de la variación del coeficiente β).

Las curvas de la Figura anterior corresponden al análisis de grandes deformaciones de suelos normalmente consolidados ($^0 p_{co} = 0$ kPa). Se ha incluido también la curva correspondiente al análisis de pequeñas deformaciones, calculada con un valor de $\beta = 0,50$, de un suelo normalmente consolidado. En la figura se observa como un suelo menos plástico, correspondiente a un mayor valor del coeficiente β , se comporta con mayor rigidez.

3.9 EJEMPLO 5: CONSOLIDACION DE UN SUELO REGIONAL.



Propiedades de los materiales:

	ARENA:	ARCILLA:
Módulo de elasticidad	$E = 3000$ kPa	$E = 1500$ kPa
Módulo de Poisson	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,3$
Peso específico	$\gamma = 2$ tn/m ³	$\gamma = 2$ tn/m ³
Fricción interna	$\phi = 30^\circ = 0,5236$ rad	$\phi = 30^\circ = 0,5236$ rad
Cohesión	$c = 0$ kPa	$c = 0$ kPa
Relación inicial de vacíos	$e_0 = 1,0$	$e_0 = 2,0$
Compresibilidad de los granos	$k_s = 1 \cdot 10^6$ kPa	$k_s = 1 \cdot 10^6$ kPa
Permeabilidad horizontal	$k_h = 86,4$ m/día	$k_h = 8,64 \cdot 10^{-5}$ m/día
Permeabilidad vertical	$k_v = 86,4$ m/día	$k_v = 8,64 \cdot 10^{-5}$ m/día
Pendiente L.N.C. en plano $v - \ln p'$	-	$\omega = 0,60$
Pend. línea recarga en plano $v - \ln p'$	-	$K = 0,05$
Variable de endurecimiento	-	$\beta = 1,00$

Figura 3-XV: Suelo Regional. Malla elementos finitos y propiedades materiales.

En esta sección se resuelve el mismo problema del ejemplo anterior (sección 3.8), pero con los datos correspondientes a un suelo arcilloso blando típico de la región Nordeste Argentino. Se analiza entonces la consolidación elastoplástica bidimensional de una arcilla saturada compresible, cuyos datos y la malla de elementos finitos utilizada son mostrados en la Figura 3-XV. La capa de drenaje en este caso está representada por una arena gruesa, en estado seco, que también permanece en el campo elástico a lo largo de todo el proceso de carga, en tanto que la arcilla es considerada con distintos estados de preconsolidación inicial: ${}^0 p_{co} = 5$ kPa, 2 kPa, y cero (normalmente consolidado), siguiendo el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado cuando ingresa al campo plástico.

Inicialmente el suelo es sometido al estado tensional, generado por peso propio, representado en la Figura 3-XVI. Luego se aplica la misma sobrecarga de superficie $p = 120$ kPa, en un periodo de 90 días, del ejemplo anterior.

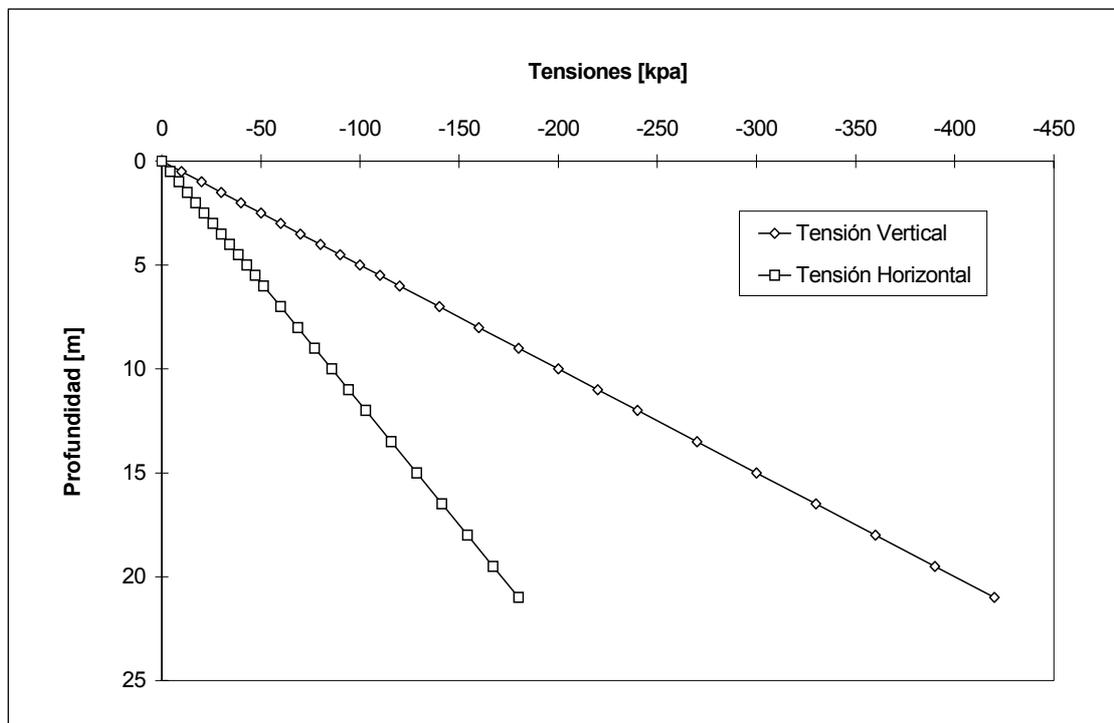


Figura 3-XVI: Estado tensional inicial por peso propio.

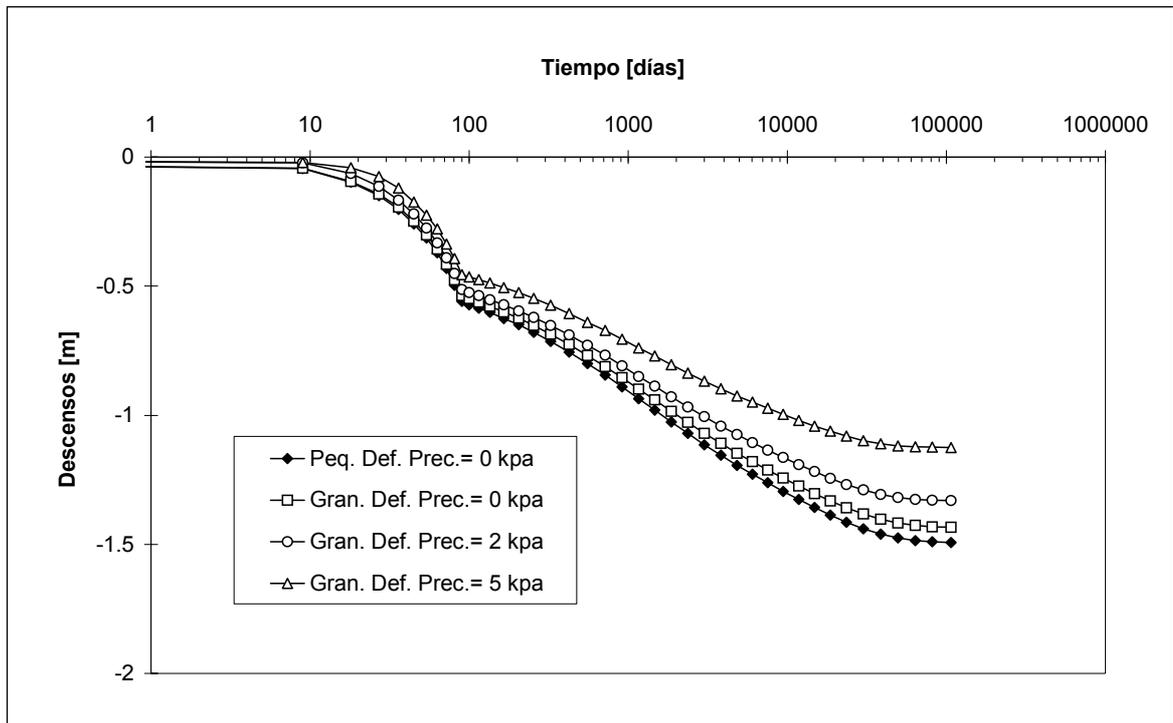


Figura 3-XVII: Evolución de los asentamientos de superficie en el eje de simetría.

En la Figura 3-XVII se muestra la evolución en el tiempo de los desplazamientos verticales de la superficie del suelo en correspondencia con el eje de simetría del problema. Se incluyen las curvas del análisis de grandes deformaciones (no linealidad geométrica) con los distintos grados de preconsolidación, y del análisis de pequeñas deformaciones para el caso de consolidación normal. Nuevamente los análisis de grandes deformaciones predicen menores valores de asentamientos respecto al análisis de pequeñas deformaciones, disminuyendo aún mas cuanto mayor es el grado de preconsolidación.

La evolución en el tiempo de la presión de poros, medida en el punto A (ver Figura 3-XV), es mostrada en la Figura 3-XVIII. En este ejemplo la solución de grandes deformaciones también predice menores sobrepresiones de poro, a lo largo de todo el proceso, respecto a la solución de pequeñas deformaciones. Para el análisis de grandes deformaciones se consideran las preconsolidaciones iniciales de 0, 2 y 5 kPa, en tanto que para el de pequeñas deformaciones se considera la consolidación normal. Para los cuatro soluciones analizadas se observa que el proceso total de consolidación dura aproximadamente 50000 días, tendiendo a disminuir para mayores preconsolidaciones iniciales.

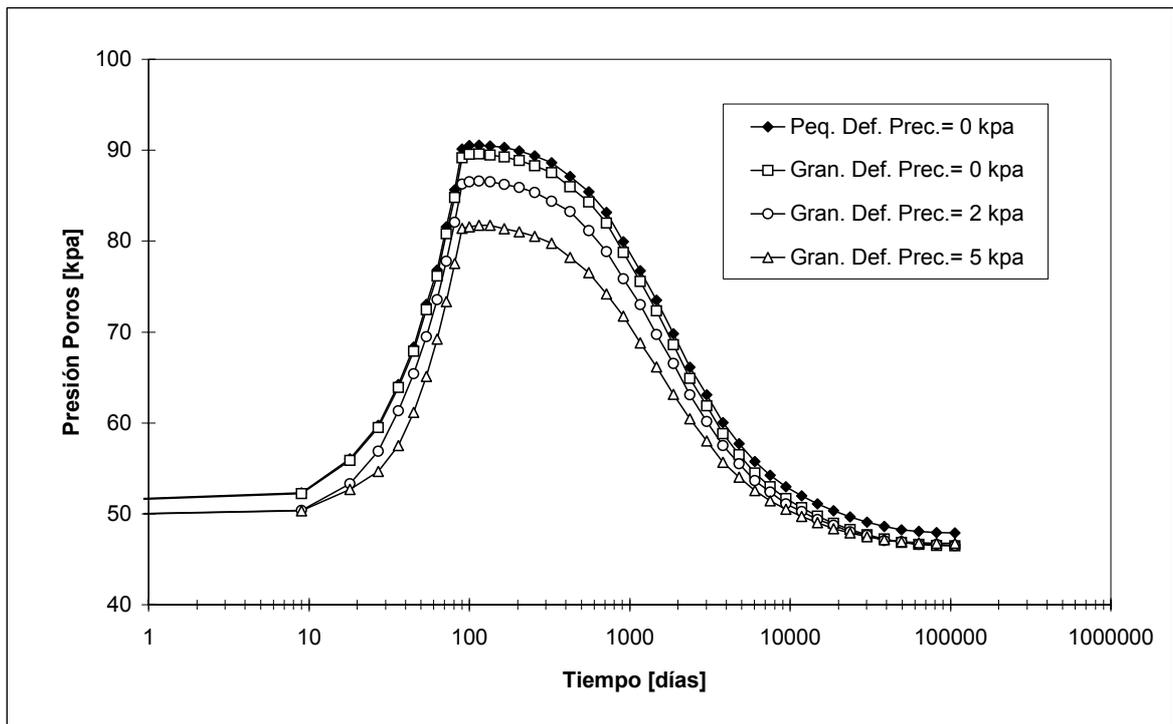


Figura 3-XVIII: Curvas de consolidación. Presiones de poro en el punto A.

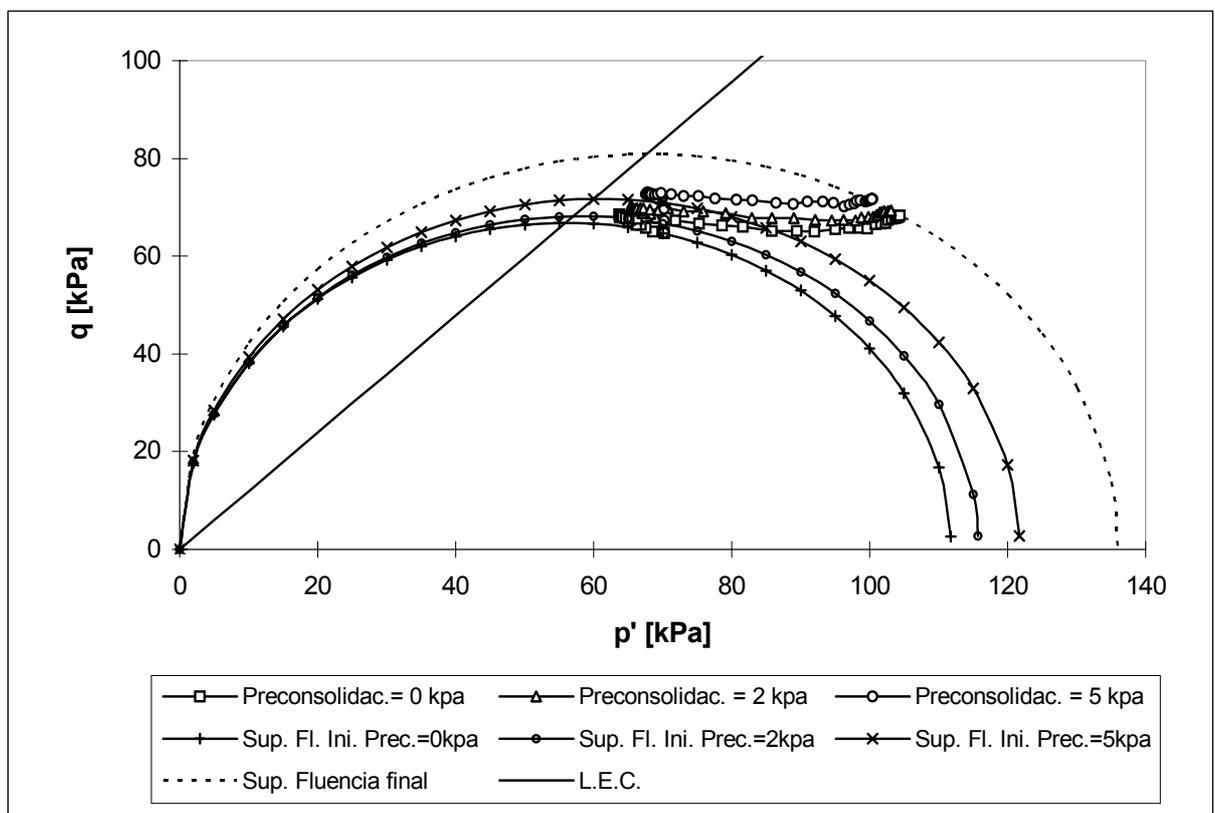


Figura 3-XIX: Trayectorias de tensiones efectivas para grandes deformaciones.

En la Figura 3-XIX se representan las trayectorias de las tensiones efectivas de Cauchy del punto de Gauss A (ver Figura 3-XV), correspondientes al análisis de grandes deformaciones, considerando los tres grados de preconsolidación inicial: ${}^0 p_{co} = 0, 2$ y 5 kPa.

Al igual que en el ejemplo anterior, sección 3.8, las trayectorias de tensiones presentan un comportamiento inicial prácticamente no drenado, acercándose a la línea de estados críticos. Luego de cesado el aumento de la sobrecarga de superficie, se inicia el proceso de consolidación, moviéndose, las trayectorias de tensiones, hacia la derecha del gráfico. La consolidación genera una ganancia de la resistencia al corte del suelo, expandiéndose además las superficies de fluencias, desde cada valor inicial de preconsolidación, hasta una superficie de fluencia final prácticamente similar para los tres grados de preconsolidación analizados.

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 INTRODUCCION.

En esta Tesis se ha desarrollado un modelo matemático para el análisis no lineal geométrico de materiales elastoplásticos genéricos, extendiéndolo también a materiales bifásicos sólido – agua, con vistas al estudio de suelos saturados compresibles. La no linealidad geométrica incluye tanto grandes deformaciones específicas como grandes rotaciones y desplazamientos. Además, la descripción del material se realizó en una configuración geométrica corrotada, lo que permite simular comportamientos anisotrópicos, es decir, no se impusieron condiciones de isotropía a la respuesta del material. Debido a estas características, el modelo matemático se convierte en una importante herramienta para el estudio de uno de los problemas mas graves, la consolidación y asentamiento de los suelos de cimentación, que enfrentan las fundaciones de obras de ingeniería, no sólo en la región Nordeste Argentino, sino también en otras muchas regiones dominadas por suelos arcillosos saturados compresibles.

4.2 MODELADO DE LA NO LINEALIDAD GEOMETRICA.

La presentación del modelo no lineal geométrico se ha hecho, en el Capítulo 1, en forma genérica para cualquier material elastoplástico. En consecuencia, la aplicación del modelo al análisis de un material en particular sólo requiere de seleccionar las propiedades y un criterio de plastificación adecuados al material en estudio. En el caso específico de suelos compresibles, como puede verse en el Capítulo 2, se ha utilizado en este trabajo el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado.

La descripción del material en términos de la tensión corrotada de Kirchhoff permitió obtener una relación constitutiva en tasas insensible a rotaciones de cuerpo rígido, como puede verse en (1.13-5). Por lo tanto, no se impusieron restricciones de isotropía en la respuesta del material, posibilitándose el modelado de materiales anisotrópicos como lo son la mayoría de los suelos.

En el desarrollo de la formulación, a efectos de conservar la simetría de la matriz de rigidez tangente del sistema de elementos finitos, se ha eliminado el término asimétrico \mathbf{C}'' , dado en la expresión (1.13-10) y analizada su influencia en la sección 1.14, del tensor constitutivo \mathbf{C}^T . Esta simplificación no generó errores numéricos en la solución de problemas prácticos. Además, debido a la gran coincidencia de los resultados del modelo de esta Tesis con los de otras publicaciones, mostrados en el Capítulo 3, se puede decir que la influencia de este término no es significativa a la hora de los cálculos de los casos analizados, previamente indicados en la sección 1.14.

Durante el desarrollo del modelo de esta Tesis se ha probado una formulación alternativa enteramente expresada en términos de magnitudes corrotadas, es decir, referenciada en la configuración corrotada, tanto para la descripción del comportamiento del material como para el planteo de la ecuación de equilibrio en tasas, lo cual generó que el sistema de ecuaciones de elementos finitos a resolver quede expresado en dicha configuración corrotada y que los resultados, deformaciones y tensiones, sean rotados a la configuración actual deformada sólo al final de cada paso de carga. La comparación de los resultados de esta formulación alternativa con los resultados del modelo finalmente desarrollado en la presente Tesis, no arrojó diferencias significativas, lo cual es lógico considerando la igualdad energética dada en (1.6-9), esto es $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}$. Sin embargo, el esfuerzo computacional resultó mayor con la formulación alternativa debido a la gran cantidad de rotaciones de tensores que es necesario llevar a cabo

cuando se resuelve el sistema de ecuaciones de elementos finitos sobre la configuración corrotada.

4.3 RESOLUCION NUMERICA DEL PROBLEMA NO LINEAL.

La resolución de todos los problemas no lineales se realizó incrementalmente con pasos de tiempo pequeños. Si bien la adopción de pasos pequeños genera una mayor cantidad de operaciones numéricas, paralelamente permite efectuar el cálculo simplificado de ciertas magnitudes, como por ejemplo el gradiente de deformación plástico de la (1.15-29), sin necesidad de evaluar la integral exacta en el tiempo, ni de calcular un incremento en el punto medio del intervalo, o paso de tiempo, aliviándose el esfuerzo computacional. De esta manera, se puede adoptar directamente, aplicando la técnica iterativa de Newton-Raphson Modificado, como configuración de referencia a la última equilibrada, esto es, la del tiempo anterior. Por lo tanto, el problema no lineal se puede resolver calculando las cargas externas y las tensiones internas en el tiempo actual, pero integrándolas sobre la configuración geometría del tiempo anterior.

La evaluación del error o residuo \mathfrak{R} se puede realizar en forma incremental y exacta con la expresión (1.11-18), pero para lograr un mejor control numérico de las tensiones totales, integradas a lo largo de todo el proceso de carga, y para evitar la acumulación de errores por redondeo, es mas conveniente el cálculo del residuo a través de la expresión (1.11-21), la cual confronta en todo momento las cargas externas con las tensiones internas, totales ambas al tiempo actual.

4.4 EJEMPLOS PRACTICOS RESUELTOS.

Los ejemplos prácticos utilizados para la comparación de resultados, efectuada en el Capítulo 3, fueron tomados de reconocidas publicaciones, por lo que la coincidencia de las soluciones numéricas de esta Tesis con las de dichas publicaciones, tanto para descripciones hipoelastoplásticas como hiperelastoplásticas, autoriza a decir que el modelo matemático aquí desarrollado es adecuado para la simulación de problemas de no linealidad geométrica. Si

bien los ejemplos resueltos corresponden a problemas planos de tensiones y de deformaciones, que son los implementados en el programa computacional, toda la formulación del modelo está hecha para problemas genéricos multiaxiales. Por lo tanto, para poder resolver casos tridimensionales solamente es necesario modificar la codificación del programa, sin necesidad de efectuar deducciones teóricas adicionales.

Las características de los materiales utilizados para los ejemplos del Capítulo 3 no responden, en la mayoría de los casos, a las características de los materiales reales. Sin embargo, los valores utilizados permiten visualizar las diferentes respuestas que brindan los análisis de pequeñas (linealidad geométrica) y grandes deformaciones (no linealidad geométrica), forzando al mismo tiempo al programa computacional, desarrollado en esta Tesis, a resolver problemas altamente no lineales. De esta manera, para resolver el ejemplo de la sección 3.9, se han usado las características físicas típicas de un suelo regional muy blando, permitiéndose la apreciación de las grandes deformaciones del material y del contraste entre los análisis lineal y no lineal geométrico.

4.5 RECOMENDACIONES PARA DESARROLLOS POSTERIORES.

A partir del trabajo realizado en esta Tesis, y como desarrollos posteriores, se propone la deducción de potenciales elásticos (funcionales de energía acumulada \bar{w}) para los tipos de suelo que se quieran analizar, de manera de poder aplicar el modelo hiperelástico en la simulación del comportamiento no lineal, evitando así la utilización de las criticadas descripciones hipoelásticas (ver primer parte de la sección 1.15).

Se deja además, para posteriores trabajos, la posibilidad de deducir y aplicar funciones de fluencia anisotrópicas, para el tipo de suelo que se desee estudiar, en términos de las tensiones corrotadas de Kirchhoff, de manera de poder extender la representación de la respuesta anisotrópica del material también al campo plástico. El criterio de plastificación utilizado en este trabajo, de Estados Críticos Modificado, establece una función isotrópica de fluencia.

Se recomienda también la resolución de sistemas de elementos finitos con matrices de rigidez no simétricas, resultantes de no eliminar el término asimétrico C'' de la expresión (1.13-13), evaluando cuantitativamente las diferencias con los resultados obtenidos por el

modelo simétrico de esta Tesis, y las diferencias entre los tiempos insumidos por el cálculo computacional en ambos casos.

Aprovechando el trabajo desarrollado por otra de las líneas de investigación del Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería, donde se ha gestado la presente Tesis, se propone estudiar el comportamiento no lineal geométrico de materiales trifásicos, sólido – agua – aire, para ser aplicado al análisis de suelos parcialmente saturados. Teniendo en cuenta la naturaleza esférica (o hidrostática) del comportamiento mecánico del aire, al igual que en el caso del agua, la inclusión de esta tercer fase parece no acarrear mayores complicaciones desde el punto de vista de la no linealidad.

Por último, aunque se trate de una tarea eminentemente práctica de codificación, se recomienda la ampliación del programa computacional para alcanzar el importante objetivo de resolver problemas tridimensionales.

REFERENCIAS

- ATKINSON, J. H. and BRANSBY, P. L. (1978) *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics*. University Series in Civil Engineering. Mc. Graw Hill, New York, USA.
- AWRUCH, A. M. y DI RADO, H. A. (1997) *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. EUDENE.
- BARDET (1996) *Finite Element Analysis of two - phase Instabilities for saturated Porous hypoelastic Solids Under Plane Strain Loading*. Engineering Computations, LA, USA.
- BATHE, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Prentice – Hall.
- BATHE, K. J and CIMENTO, A. P. (1984). *Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- BATHE, K. J and OZDEMIR, H. (1976). *Elastic-Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis*. Computers & Structures. Pergamon Press.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K. and MORAN, B. (2000) *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons. England.
- BIOT, M. A. (1941) *General Theory of three - dimensional consolidation*. Journal of Applied Physics.
- BIOT, M. A. (1956) *Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid*. Journal of Applied Physics.
- BORJA, R. I.; ALARCON, E. (1995). *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science.
- BORJA, R. I.; TAMAGNINI, C.; ALARCON, E. (1998). *Elasto-Plastic Consolidation at Finite Strain. Part 2: Finite Element Implementation and Numerical Examples*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier Science.
- CARTER, P.; BOOKER, J. R. and SMALL, J. C. (1979) *The analysis of finite elasto-plastic consolidation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.

- DI RADO, H. A. y AWRUCH, A. M. (1997) *Simulación Numérica de Procesos de Consolidación de Suelos Usando el Método de los Elementos Finitos*. Tesis de Magíster en Mecánica Aplicada al Análisis y Proyecto de Estructuras. Universidad Nacional del Nordeste.
- DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M. & BENEYTO, P. A. (1998) *Consolidation in Saturated Porous Media. Implementation and Numerical Problems*. Computational Mechanics. New Trends and Applications. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE) and Fourth World Congress on Computational Mechanics. Buenos Aires. Argentina.
- DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M.; BENEYTO P. A. & MANZOLILLO, J. E. (1999) *Tópicos en el Análisis no Lineal Físico y Geométrico. Aplicaciones a Consolidación de Suelos*. Sexto Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM 99). Mendoza. Argentina.
- DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M.; BENEYTO P. A.; MANZOLILLO, J. E. (1999) *Análisis de Fundaciones Directas Usando el Método de Los Elementos Finitos*. Centro de Información Tecnológica (CIT). Chile.
- GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. (1984) *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, USA.
- HILL, R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, U. K.
- HUGHES, T. J. R. & WINGET, J. M. (1980) *Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- KANCHI, M. B.; ZIENKIEWICZ, O. C. and OWEN, D. J. (1978). *The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometrical non-linear effects*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. John Wiley & Sons.
- KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J.K. (1993) *Hygrothermomechanical evaluation of porous media under finite deformations: Part I - finite element formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- KIM, C. S.; LEE, T. S.; ADVANI, S. H. and LEE, J.K. (1993) *Hygrothermomechanical evaluation of porous media under finite deformation; Part II: Model validation and field simulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- LAMBE, T. W. & WHITMAN, R. V. (1979) *Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, USA.
- LEWIS, R. W. and SCHREFLER, B. A. (1987) *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. J. Wiley & Sons, New York.
- MALVERN, L. E. (1969) *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- MANOHARAN & DASPGUTA (1995) *Consolidation Analysis of Elastoplastic Soil*. Computers & Structures.
- MANZOLILLO, J. E.; DI RADO, H. A.; AWRUCH, A. M. & BENEYTO, P. A. (2000) *Análisis No Lineal en Problemas de Alta Compresibilidad. Simulación por el M.E.F.* 9º Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica - IV Congreso Nacional de Energía (COCIM - CONAE 2000). Valparaíso, Chile.

- MAOSONG HUANG and ZIENKIEWICZ, O. C. (1998) *New Unconditionally Stable Staggered Solution Procedures For Coupled Soil – Pore Fluid Dynamic Problems*. International Journal For Numerical Methods in Engineering. John Wiley & Sons.
- NAYAK, G. C. and ZIENKIEWICZ, O. C. (1972) *Elasto Plastic stress analysis. A generation of various constitutive relations including strain softening*. International Journal For Numerical Methods in Engineering.
- OWEN, D. R. J. and HINTON, E. (1980) *Finite Elements in Plasticity; Theory and Practice*. Pineridge Press Limited, Swansea, U. K.
- PRAGHER, W. (1961) *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Company.
- SIMO, J. C. and HUGHES, T. J. R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer – Verlag. New York, Inc.
- SMITH & GRIFFITHS (1988) *Programming The Finite Element Method*. John Wiley & Sons, U.K.
- TERZAGHI, K. & PECK, R. B. (1986). *Mecánica de Suelos en la Ingeniería Practica*. Edit. El Ateneo.
- VILADKAR, M. N.; NOORZAEI, J. and GODBOLE, P. N. (1995) *Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials*. Computer & Structures. Pergamon.
- ZIENKIEWICZ, O. C. and CORMEAU, I. C. (1974) *Visco-Plasticity and creep in elastic solids. A unified numerical solution approach*. International Journal For Numerical Methods in Engineering.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. & LEWIS, R. W. (1975) *Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics*. Geotechnique.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. & LEWIS, R. W. (1977) *A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and viscoplasticity)*. In: Finite Elements in Geomechanics (Edited by Gudehus). John Wiley & Sons, London, U.K.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and SHIOMI, T. (1984) *Dynamic behavior of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical simulation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
- ZIENKIEWICZ, O. C. y TAYLOR, R. L. (1994). *El Método de los Elementos Finitos*. Mc. Graw – Hill.

--- *** ---