CAPÍTULO 5 — LAS ECUACIONES DISCRETAS. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

5.1 OBJETIVOS.

En este capítulo se realizará la versión discreta de las ecuaciones formuladas en capítulos anteriores usando el Método de los Elementos Finitos. Se presentará a veces en forma matricial y a veces usando la notación de Voigt[9]. En la mayor parte de los casos se mostrará la estructura de matrices y vectores necesarios para la programación en tres dimensiones aunque se dará también la versión en dos para algunos casos especiales teniendo siempre en cuenta que detalles de la forma 2D y su programación pueden consultarse en la referencia [53].

5.2 SOBRE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Brevemente mencionaremos aquí algunas características generales que se han usado en la formulación por el método mencionado. Todo lo que se ha desarrollado en la presente tesis se ha incorporado al programa FECCUND (Finite Element Consolidation Code Using a Non-linear Development) iniciado durante el desarrollo de la referencia [23] y que resolvía el problema de la consolidación de suelos arcillosos saturados con versiones muy rudimentarias de no linealidad geométrica pero con énfasis en la no linealidad física. Este código fue ampliado en 2003 a través de los trabajos descriptos en las referencias [10] y [53]. En la primera se incorporó el modelo para consolidación de suelos no saturados planteado en forma teórica en referencia [40] y en la segunda se amplió la capacidad del modelo saturado por agregado de una descripción mejorada de la no linealidad geométrica agregándose además el tratamiento de tensiones y pre-consolidaciones iniciales.

El programa completo ha sido codificado en el lenguaje Fortran 90/95, y se encuentra disponible en el Departamento de Mecánica Aplicada de la Facultad de Ingeniería de la UNNE.

Para los cálculos en dos dimensiones se utilizan elementos finitos rectangulares de ocho nodos para la descripción del desplazamiento, y de cuatro nodos para la descripción de la variable presión de poros (usada en los modelos de suelos saturados), con 2 x 2 puntos de Gauss para la integración numérica. Los problemas resueltos corresponden a estados planos de tensiones y estados planos de deformaciones, y fueron tomados en su mayoría de publicaciones de reconocidos autores con el objeto de poder comparar y validar los resultados de los modelos desarrollados y programados en esta Tesis[62], tanto para sólidos continuos como para suelos saturados. El problema tridimensional es resuelto con elementos isoparamétricos de 20 nodos para desplazamientos 8 para presiones de poro con integración 2 x 2 x 2.

En los ejemplos presentados se utilizan los criterios de plastificación de Von Mises para metales y de Estados Críticos Modificado para suelos compresibles.

Al aplicar el Método de los Elementos Finitos, los tensores simétricos son escritos como arreglos de menor orden para simplificar la codificación en programas computacionales. El procedimiento para realizar esta conversión se denomina regla de Voigt[9]. Así, las tensiones y las deformaciones se convierten de tensores de segundo orden a matrices columnas (o vectores). A modo de ejemplo, para un problema bidimensional se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \text{ y } \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \qquad (5.2\text{-}1)$$

En tanto, los tensores constitutivos de cuarto orden se convierten a matrices de segundo orden de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \text{ ó } \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \xrightarrow{\text{notación de Voigt}} \{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \text{ ó } \sigma_a = C_{ab}\varepsilon_b \qquad (5.2\text{-}2)$$

Lo que lleva, en problemas bidimensionales, a:

$$[\mathbf{C}] \equiv \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} \end{bmatrix} \qquad (5.2\text{-}3)$$

La contracción de índices de la matriz constitutiva acompaña la contracción de los tensores de tensión y deformación. A modo de ejemplo, se representa un problema 3D:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112}\\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212}\\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312}\\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312}\\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312}\\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix} \tag{5.2-4}$$

que se transformará en:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{1}\\ \sigma_{2}\\ \sigma_{3}\\ \sigma_{4}\\ \sigma_{5}\\ \sigma_{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\varepsilon_{1}\\ \varepsilon_{2}\\ \varepsilon_{3}\\ 2\varepsilon_{4}\\ 2\varepsilon_{5}\\ 2\varepsilon_{6}\end{bmatrix} \tag{5.2-5}$$

Si el tensor **C** posee simetría mayor (3.9-2), la matriz [**C**] resulta simétrica. También es importante destacar que transformaciones del tipo (3.10-12) ó (3.11-8) no pueden realizarse en notación de Voigt. Esta notación, también llamada notación matricial, utiliza los corchetes {} y las llaves [] para identificar vectores y matrices respectivamente aunque cuado resulte redundante, se obviará esta diferenciación.

5.3 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (2.5-13).

Para poder implementar en computador al sistema de ecuaciones obtenidos en el apartado 2.5 del capítulo 1 debemos primeramente llevarlas a su forma débil aplicando el método de Galerkin[3,73] que por tratarse de un procedimiento muy conocido, no se ha detallado aquí. Luego de obtener la forma débil del sistema (2.5-13), queda:

$$\begin{aligned}&\mathbf{K}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}+\mathbf{C}_{\mathbf{sw}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{w}+\mathbf{C}_{\mathbf{sg}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{g}=\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}\\ &\mathbf{C}_{\mathbf{ws}}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}+\mathbf{P}_{\mathbf{ww}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{w}+\mathbf{Q}_{\mathbf{wg}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{g}+\mathbf{H}_{\mathbf{ww}}\,\hat{\mathbf{p}}^{w}=\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{w}}\\ &\mathbf{C}_{\mathbf{gs}}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}+\mathbf{Q}_{\mathbf{gw}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{w}+\mathbf{P}_{\mathbf{gg}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{g}+\mathbf{H}_{\mathbf{gg}}\,\hat{\mathbf{p}}^{g}=\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}}\end{aligned} \tag{5.3-1}$$

Siendo que, para problemas tridimensionales se tiene:

$\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$: Vector velocidad de desplazamiento nodal,

$$\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}^T = \{\dot{\hat{u}}_1^1, \dot{\hat{u}}_2^1, \dot{\hat{u}}_3^1; \dot{\hat{u}}_1^2, \dot{\hat{u}}_2^2, \dot{\hat{u}}_3^2; \ldots \ \dot{\hat{u}}_1^n, \dot{\hat{u}}_2^n, \dot{\hat{u}}_3^n\} \tag{5.3-2}$$

$\{\dot{\hat{\mathbf{p}}}^w\}$: Vector tasa de presión de agua nodal,

$$\{\dot{\hat{\mathbf{p}}}^w\}^T = \{\dot{\hat{p}}^{w1}; \dot{\hat{p}}^{w2}; \ldots \ \dot{\hat{p}}^{wn}\} \tag{5.3-3}$$

$\{\dot{\hat{\mathbf{p}}}^g\}$: Vector tasa de presión de aire nodal,

$$\{\dot{\hat{\mathbf{p}}}^g\}^T = \{\dot{\hat{p}}^{g1}; \dot{\hat{p}}^{g2}; \ldots \ \dot{\hat{p}}^{gn}\} \tag{5.3-4}$$

$\{\hat{\mathbf{p}}^w\}$, $\{\hat{\mathbf{p}}^g\}$: Vectores presión de agua y aire respectivamente.

n = número de nodos del elemento finito.

$\mathbf{N}^u$: funciones de interpolación para desplazamiento:

$$\{\dot{\mathbf{u}}\} = [\mathbf{N}^u]\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}, \text{ ó } \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & 0 & \ldots\ldots & N_n^u & 0 & 0 \\ 0 & N_1^u & 0 & \ldots\ldots & 0 & N_n^u & 0 \\ 0 & 0 & N_1^u & \ldots\ldots & 0 & 0 & N_n^u \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{u}}_1^1 \\ \dot{\hat{u}}_2^1 \\ \dot{\hat{u}}_3^1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{u}}_1^n \\ \dot{\hat{u}}_2^n \\ \dot{\hat{u}}_3^n \end{Bmatrix} \tag{5.3-5}$$

$\mathbf{N}^p$: funciones de interpolación para presión de poros (agua o aire):

$$\{\dot{p}^w\} = [\mathbf{N}^p]\{\dot{\hat{\mathbf{p}}}^w\}, \text{ ó } \dot{p}^w = [N_1^p \ \ \ldots\ldots \ \ N_n^p] \begin{Bmatrix} \dot{\hat{p}}_1^w \\ \vdots \\ \dot{\hat{p}}_n^w \end{Bmatrix} \tag{5.3-6}$$

[B]: relación tasa de deformación – velocidad nodal:

$$\{\mathbf{D}\}=\left[\mathbf{B}^u\right]\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\},\text{ó}\begin{Bmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ D_4\\ D_5\\ D_6\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{u}_{1,1}\\ \dot{u}_{2,2}\\ \dot{u}_{3,3}\\ \dot{u}_{2,3}+\dot{u}_{3,2}\\ \dot{u}_{1,3}+\dot{u}_{3,1}\\ \dot{u}_{1,2}+\dot{u}_{2,1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N^u{}_{1,1} & 0 & 0 & \ldots.. & N^u{}_{n,1} & 0 & 0\\ 0 & N^u{}_{1,2} & 0 & \ldots.. & 0 & N^u{}_{n,1} & 0\\ 0 & 0 & N^u{}_{1,3} & \ldots.. & 0 & 0 & N^u{}_{n,1}\\ 0 & N^u{}_{1,3} & N^u{}_{1,2} & \ldots.. & 0 & N^u{}_{n,3} & N^u{}_{n,2}\\ N^u{}_{1,3} & 0 & N^u{}_{1,1} & \ldots.. & N^u{}_{n,3} & 0 & N^u{}_{n,1}\\ N^u{}_{1,2} & N^u{}_{1,1} & 0 & \ldots.. & N^u{}_{n,2} & N^u{}_{n,1} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\hat{u}}_1^1\\ \dot{\hat{u}}_2^1\\ \dot{\hat{u}}_3^1\\ \vdots\\ \dot{\hat{u}}_1^n\\ \dot{\hat{u}}_2^n\\ \dot{\hat{u}}_3^n\end{Bmatrix} \quad (5.3\text{-}7)$$

Con $\dot{u}_{i,j}=\dfrac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}$ y $N^u{}_{i,j}=\dfrac{\partial N^u{}_i}{\partial x_j}$

Las matrices en (5.3-1), con $d\Omega$ en lugar de $d\varphi(B)$, son:

$$[\mathbf{K}]=\int_\Omega\left[\mathbf{B}^u\right]^T[\mathbf{C}]\left[\mathbf{B}^u\right]d\Omega \qquad \{\dot{\mathbf{F}}_s\}=\int_\Omega\left[\mathbf{N}^u\right]^T\{\dot{\mathbf{b}}\}d\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}\left[\mathbf{N}^u\right]^T\{\dot{\mathbf{t}}\}d\Gamma \quad (5.3\text{-}8)$$

$$\left[\mathbf{C}_{sg}\right]=\int_\Omega\left[\mathbf{B}^u\right]^T a_2\,\mathbf{m}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \qquad \left[\mathbf{C}_{gs}\right]=\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T\mathbf{m}\,a_2\left[\mathbf{B}^u\right]d\Omega \quad (5.3\text{-}9)$$

$$\left[\mathbf{C}_{ws}\right]=\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T\mathbf{m}\,a_1\left[\mathbf{B}^u\right]^T d\Omega \qquad \left[\mathbf{C}_{sw}\right]=\int_\Omega\left[\mathbf{B}^u\right]^T a_1.\mathbf{m}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \quad (5.3\text{-}10)$$

$$\left[\mathbf{Q}_{wg}\right]=-\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T a_{12}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \qquad \left[\mathbf{Q}_{gw}\right]=-\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T a_{21}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \quad (5.3\text{-}11)$$

$$\left[\mathbf{H}_{ww}\right]=\int_\Omega\nabla\left[\mathbf{N}^p\right]^T\frac{\mathbf{k}_{wi}}{\gamma_w}\nabla\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \qquad \left[\mathbf{H}_{gg}\right]=\int_\Omega\nabla\left[\mathbf{N}^p\right]^T\frac{D_i}{P}(1-S_w)n\,\nabla\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \quad (5.3\text{-}12)$$

$$\left[\mathbf{P}_{ww}\right]=-\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T a_{11}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \qquad \left[\mathbf{P}_{gg}\right]=-\int_\Omega\left[\mathbf{N}^p\right]^T a_{22}\left[\mathbf{N}^p\right]d\Omega \quad (5.3\text{-}13)$$

$$\{\dot{\mathbf{F}}_g\}=-\int_{\Gamma g}\left[\mathbf{N}^p\right]^T\{\dot{\mathbf{q}}_g\}d\Gamma \qquad \{\dot{\mathbf{F}}_w\}=-\int_{\Gamma_w}\left[\mathbf{N}^p\right]^T\{\dot{\mathbf{q}}_w\}d\Gamma \quad (5.3\text{-}14)$$

con los siguientes valores para los coeficientes (calculados en forma discreta en el tiempo anterior y siendo que los valores de saturación deberán obtenerse de la curva característica del apartado 1.7):

$$a_1 = \alpha S_w \text{ y } a_2 = \alpha S_g \tag{5.3-15}$$

$$a_{11} = \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_w + \left(\Delta p^g - \Delta p^w\right) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^w \right\} \tag{5.3-16}$$

$$a_{12} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_g - \left(\Delta p^g - \Delta p^w\right) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^w \right\} \tag{5.3-17}$$

$$a_{21} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_w + \left(\Delta p^g - \Delta p^w\right) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^g \right\} \tag{5.3-18}$$

$$a_{22} = \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_g - \left(\Delta p^g - \Delta p^w\right) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^g \right\} \tag{5.3-19}$$

$$C_s = n \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c},\ C_s^w = -S_w \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_g - \Delta p^c \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c} \right) \text{ y } C_s^g = -S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w - \Delta p^c \frac{\Delta S_w}{\Delta p^c} \right) \tag{5.3-20}$$

5.4 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (3.8-6).

Se verá ahora la forma discreta de la ecuación del principio de trabajos virtuales para sólidos en general.

Se comienza por el producto ${}^t\delta\mathbf{L}:{}^t\mathbf{C}^{\tau}:{}^t\mathbf{D}$, que forma parte del primer miembro de la (3.8-6). Este puede ser reemplazado por ${}^t\delta\mathbf{D}:{}^t\mathbf{C}^{\tau}:{}^t\mathbf{D}$, debido a la simetría menor (3.9-3) del tensor $\mathbf{C}^{\tau}$. Luego, la forma discreta del cuerpo continuo en elementos finitos, utilizando la notación de Voigt, y teniendo en cuenta (3.5-4), la (3.8-6) se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T . \int\limits_{{}^t\varphi(B)} \left[\mathbf{B}^u\right]^T . \left[{}^t\mathbf{C}^{\tau}\right]\left[\mathbf{B}^u\right] \frac{d\varphi(B)}{J} . \{\dot{\mathbf{u}}\} + \{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T . \int\limits_{{}^t\varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T . \left[{}^t\boldsymbol{\sigma}\right][\boldsymbol{\beta}] d\varphi(B) . \{\dot{\mathbf{u}}\} = \\ &= \{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T . \int\limits_{{}^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . \{\dot{\mathbf{b}}\} \rho . d\varphi(B) + \{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T . \int\limits_{\partial^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . \{\dot{\bar{\mathbf{t}}}\} d\partial\varphi(B) \end{aligned} \tag{5.4-1}$$

siendo, para problemas tridimensionales $\boldsymbol{\beta}$ la relación gradiente espacial de velocidad – velocidad nodal, definida en esta Tesis de la siguiente forma

$$\{\mathbf{L}\}=[\boldsymbol{\beta}]\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\},\text{ ó }\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\\L_6\\L_7\\L_8\\L_9\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dot{u}_{1,1}\\\dot{u}_{1,2}\\\dot{u}_{1,3}\\\dot{u}_{2,1}\\\dot{u}_{2,2}\\\dot{u}_{3,3}\\\dot{u}_{3,1}\\\dot{u}_{3,2}\\\dot{u}_{3,3}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N^u_{1.1}&0&0&.....&N^u_{n.1}&0&0\\N^u_{1.2}&0&0&.....&N^u_{n.2}&0&0\\N^u_{1.3}&0&0&.....&N^u_{n.3}&0&0\\0&N^u_{1.1}&0&.....&0&N^u_{n.1}&0\\0&N^u_{1.2}&0&.....&0&N^u_{n.2}&0\\0&N^u_{1.3}&0&.....&0&N^u_{n.3}&0\\0&0&N^u_{1.1}&.....&0&0&N^u_{n.1}\\0&0&N^u_{1.2}&.....&0&0&N^u_{n.2}\\0&0&N^u_{1.3}&.....&0&0&N^u_{n.3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\hat{u}}^1_1\\\dot{\hat{u}}^1_2\\\dot{\hat{u}}^1_3\\\vdots\\\dot{\hat{u}}^n_1\\\dot{\hat{u}}^n_2\\\dot{\hat{u}}^n_3\end{Bmatrix}\qquad(5.4\text{-}2)$$

con $\dot{u}_{i,j}=\dfrac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_j}$ y $N^u_{i,j}=\dfrac{\partial N^u_i}{\partial x_j}$, ambas medidas sobre la configuración ${}^t\varphi(B)$.

La distribución de los elementos de la matriz $[\mathbf{C}^{\tau}]$, correspondiente a la relación constitutiva $\{L_v\boldsymbol{\tau}\}=[\mathbf{C}^{\tau}].\{\mathbf{D}\}$, es similar a la de (5.2-5).

El cálculo del tensor $\mathbf{C}^{\tau}$ fue mostrado en (3.10-13), (3.11-8) o (3.11-12). La primer referencia corresponde lo usual según la bibliografía mientras que los dos últimos corresponden a la propuesta realizada en esta tesis según sean o no importantes las tensiones tangenciales (Apartado 3.11). Es importante presentar el formato de la parte simétrica y no simétrica de (3.11-9):

$$\mathbf{C}^{sim}=\begin{bmatrix}2\tau_{11}&0&0&0&\tau_{13}&\tau_{12}\\&2\tau_{22}&0&\tau_{23}&0&\tau_{12}\\&&2\tau_{11}&\tau_{23}&\tau_{13}&0\\&&&\frac{1}{2}(\tau_{33}+\tau_{22})&\frac{1}{2}\tau_{21}&\frac{1}{2}\tau_{13}\\&&\mathit{Simetrico}&&\frac{1}{2}(\tau_{33}+\tau_{11})&\frac{1}{2}\tau_{23}\\&&&&&\frac{1}{2}(\tau_{22}+\tau_{11})\end{bmatrix}\qquad(5.4\text{-}3)$$

$$\mathbf{C}^{asim}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&\tau_{13}&\tau_{12}\\0&0&0&\tau_{23}&0&-\tau_{21}\\0&0&0&-\tau_{32}&-\tau_{31}&0\\0&0&0&\frac{1}{2}(\tau_{33}-\tau_{22})&-\frac{1}{2}\tau_{21}&-\frac{1}{2}\tau_{31}\\0&0&0&-\frac{1}{2}\tau_{12}&\frac{1}{2}(\tau_{33}-\tau_{11})&\frac{1}{2}\tau_{32}\\0&0&0&\frac{1}{2}\tau_{13}&\frac{1}{2}\tau_{23}&\frac{1}{2}(\tau_{22}-\tau_{11})\end{bmatrix}\qquad(5.4\text{-}4)$$

Por otro lado, el arreglo de la matriz $[{}^t\boldsymbol{\sigma}]$ es obtenido considerando la igualdad que se debe mantener entre el producto tensorial y el producto matricial. Es de aclarar que no es la única forma de generarlo, pero es la adoptada aquí. Teniendo en cuenta que

$$ {}^t\delta\mathbf{L}:{}^t\mathbf{L}.{}^t\boldsymbol{\sigma} = \{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T.[\boldsymbol{\beta}]^T.[{}^t\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{\beta}]\{\dot{\mathbf{u}}\} $$

la matriz $[{}^t\boldsymbol{\sigma}]$ viene dada por:

$$ \Rightarrow \left[{}^t\boldsymbol{\sigma}\right] \equiv \begin{bmatrix} {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{23} & {}^t\sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{23} & {}^t\sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{11} & {}^t\sigma_{21} & {}^t\sigma_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{23} & {}^t\sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (5.4\text{-}5) $$

5.5 INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (3.8-6).

Para buscar la solución paso a paso del problema no lineal, con pasos discretos de tiempo Δt, se requiere que la (5.4-1) esté expresada en forma incremental. En consecuencia, es necesario transformar los diferenciales de tiempo (o tasas) a diferencias finitas:

$$ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \cong \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}}{\Delta t} \qquad (5.5\text{-}1) $$

De acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, todas las magnitudes se definen sobre la última configuración equilibrada (tiempo t), y se pasa a la siguiente (tiempo $t+\Delta t$) mediante un proceso iterativo, como el de Newton-Raphson modificado. Por lo tanto, se hace lineal al problema considerando que tanto las variables en tasas como sus incrementos están referenciados sobre la configuración del tiempo t, es decir, se utilizan las mismas matrices $\boldsymbol{\beta}$ de (5.4-2) y $\mathbf{B}$ de (5.3-7), medidas en el tiempo t, para el cálculo incremental. La matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, que surge de hacer lineal el primer miembro de la (5.4-1), se denomina matriz de rigidez tangente.

Simplificando $\{\delta\dot{\mathbf{u}}\}^T$ de la (5.4-1) y pasando a la forma incremental, se obtiene:

$$\left(\int_{{}^t\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T . [{}^t\mathbf{C}^\tau][\mathbf{B}^u] \frac{d\varphi(B)}{J} + \int_{{}^t\varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T . [{}^t\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{\beta}.]d\varphi(B) \right) . \{\Delta\hat{\mathbf{u}}\} = \\ = \int_{{}^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . \{\Delta\mathbf{b}\}.\rho.d\varphi(B) + \int_{\partial^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . [\Delta\bar{\mathbf{t}}] d\partial\varphi(B) \tag{5.5-2}$$

El primer miembro se conoce comúnmente como fuerzas nodales internas, por ser las reacciones internas que equilibran al segundo miembro, conocido como fuerzas nodales externas. Nótese que las fuerzas internas están relacionadas al incremento de los desplazamientos nodales $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ a través de dos términos: el primero debido a la respuesta del material, y el segundo debido al estado actual de tensiones, el cual lleva en cuenta todos los efectos geométricos de la deformación, como rotaciones y elongaciones. En consecuencia, a estos términos se los denomina rigidez de material $\mathbf{K}_{\text{mat}}$ y rigidez geométrica $\mathbf{K}_{\text{geo}}$, respectivamente, y la suma de ambas forma la matriz de rigidez tangente del sistema de elementos finitos. En forma matricial compacta se puede escribir la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{K}_{\text{mat}} + \mathbf{K}_{\text{geo}}) . \Delta\hat{\mathbf{u}} = \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \tag{5.5-3}$$

siendo:

$$\mathbf{K}_{\text{mat}} = \int_{{}^t\varphi(B)} [\mathbf{B}^u]^T . [{}^t\mathbf{C}^\tau][\mathbf{B}] \frac{d\varphi(B)}{J} \tag{5.5-4}$$

$$\mathbf{K}_{\text{geo}} = \int_{{}^t\varphi(B)} [\boldsymbol{\beta}]^T . [{}^t\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{\beta}] d\varphi(B) \tag{5.5-5}$$

$$\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{{}^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . \{\Delta\mathbf{b}\}.\rho.d\varphi(B) + \int_{\partial^t\varphi(B)} [\mathbf{N}]^T . [\Delta\bar{\mathbf{t}}] d\partial\varphi(B) \tag{5.5-6}$$

La solución de la (5.5-3), que da los desplazamientos nodales $\Delta\hat{\mathbf{u}}$, se calcula con cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, luego de imponer las condiciones de borde (o de contorno) al sistema de elementos finitos, y en cada iteración del proceso incremental. Debido a que el problema es no lineal, y de acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, al final de cada iteración o ciclo de cálculo aparece un error o residuo $\Re$ que, según la (3.2-1) y para un proceso incremental, vale:

$$\Re = \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} - \Delta\mathbf{F}_{\text{int}} \neq \mathbf{0} \tag{5.5-7}$$

Llevando en cuenta la (5.4-1), se obtiene la expresión para el cálculo del residuo:

$$\Re = \Delta\mathbf{F}_{ext} - (\mathbf{K}_{mat} + \mathbf{K}_{geo}) \,.\, \Delta\hat{\mathbf{u}}$$

$$= \Delta\mathbf{F}_{ext} - \left(\int_{^t\varphi(B)} \left[\mathbf{B}^u\right]^T . \left[{}^t\mathbf{C}^\tau\right] \{\Delta\hat{\mathbf{e}}\} \frac{d\varphi(B)}{J} + \int_{^t\varphi(B)} \boldsymbol{\beta}^T . \left[{}^t\boldsymbol{\sigma}\right] \nabla\{\Delta\hat{\mathbf{u}}\} d\varphi(B) \right) \neq \mathbf{0} \qquad (5.5\text{-}8)$$

donde $\Delta\hat{\mathbf{e}}$ es el incremento de deformación lineal nodal, en la configuración actual, definido a partir de (3.4-19) y (5.3-7) como:

$$\Delta\hat{\mathbf{e}} = {}^t\mathbf{B}.\Delta\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \Delta\hat{e}_1 \\ \Delta\hat{e}_2 \\ \Delta\hat{e}_3 \\ \Delta\hat{e}_4 \\ \Delta\hat{e}_5 \\ \Delta\hat{e}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\hat{e}_{11} \\ \Delta\hat{e}_{22} \\ \Delta\hat{e}_{33} \\ 2\Delta\hat{e}_{23} \\ 2\Delta\hat{e}_{13} \\ 2\Delta\hat{e}_{12} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta\hat{u}_i}{\partial\, {}^t x_j} + \frac{\partial \Delta\hat{u}_j}{\partial\, {}^t x_i} \right) \qquad (5.5\text{-}9)$$

y $\nabla\Delta\hat{\mathbf{u}}$ es el gradiente espacial del incremento de los desplazamientos nodales, definido a partir de (3.4-17) y (5.4-2) como:

$$\nabla\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^t\boldsymbol{\beta}.\Delta\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \nabla\Delta\hat{u}_1 \\ \nabla\Delta\hat{u}_2 \\ \Delta\nabla\hat{u}_3 \\ \nabla\Delta\hat{u}_4 \\ \nabla\Delta\hat{u}_5 \\ \nabla\Delta\hat{u}_6 \\ \nabla\Delta\hat{u}_7 \\ \nabla\Delta\hat{u}_8 \\ \nabla\Delta\hat{u}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\hat{u}_{1,1} \\ \Delta\hat{u}_{1,2} \\ \Delta\hat{u}_{1,3} \\ \Delta\hat{u}_{2,1} \\ \Delta\hat{u}_{2,2} \\ \Delta\hat{u}_{3,3} \\ \Delta\hat{u}_{3,1} \\ \Delta\hat{u}_{3,2} \\ \Delta\hat{u}_{3,3} \end{Bmatrix}, \text{ con } \Delta\hat{u}_{i,j} = \frac{\partial \Delta\hat{u}_i}{\partial\, {}^t x_j} \qquad (5.5\text{-}10)$$

El cálculo del residuo $\Re$ con la (5.5-8) puede introducir, en algunos casos, errores numéricos por redondeo, que se acumulan hacia adelante al avanzar en el tiempo con los incrementos de carga. Para evitar estos errores y lograr un mejor control en el cálculo de la tensión total en el tiempo $t+\Delta t$, se puede calcular el vector residuo como la diferencia que surge de plantear el equilibrio del cuerpo en un instante determinado $t+\Delta t$, con el total de los esfuerzos actuantes en ese momento, es decir:

$$\Re = \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext}\right\} - \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(i)}\right\} \neq \mathbf{0} \qquad (5.5\text{-}11)$$

$$\Re = \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext}\right\} - \int_{^t\varphi(B)} \left[\mathbf{B}^u\right]^T . \left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\right\} d\varphi(B) \neq \mathbf{0} \qquad (5.5\text{-}12)$$

Siendo, (*i*), una iteración por no linealidad. El vector residuo $\Re$, calculado con (5.5-8) o (5.5-12), es tenido en cuenta como carga para la siguiente iteración de cálculo. El proceso iterativo se detiene, para proceder con el siguiente incremento de tiempo (o carga), cuando el valor de $\Re$ se hace menor o igual a una cierta tolerancia preestablecida.

5.6 FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES (4.3-1).

Para hacer discreta la ecuación de equilibrio (4.3-1) de manera análoga a lo hecho en los apartados 5.3 y 5.4 , debemos fijar nuestra atención en la manera de definir la matriz de rigidez del elemento. La ecuación (4.3-1) debe sustituirse en el primer término de la primer ecuación de la (2.5-13) o más recientemente, de la (5.3-1). Recordando esta última:

$$\mathbf{K}\dot{\hat{\mathbf{u}}}+\mathbf{C}_{sw}\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{w}+\mathbf{C}_{sg}\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{g}=\dot{\hat{\mathbf{F}}}_{s} \qquad (5.6\text{-}1)$$

Ahora, la matriz **K,** a diferencia de (5.5-2), y en notación de Voigt, será:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}=&\int_{{}^{t}\varphi(B)}\left[\mathbf{B}^{u}\right]^{T}.\left[{}^{t}\mathbf{C}^{\tau}\right]\left[\mathbf{B}^{u}\right]\frac{d\varphi(B)}{J}+\\&+\int_{{}^{t}\varphi(B)}[\boldsymbol{\beta}]^{T}.\left[{}^{t}\boldsymbol{\sigma}\right][\boldsymbol{\beta}].d\varphi(B)+\int_{{}^{t}\varphi(B)}\left[\mathbf{B}^{u}\right]^{T}.{}^{t}a_{1}.{}^{t}p^{w}.\{\mathbf{m}\}.\{\mathbf{m}\}^{T}.\left[\mathbf{B}^{u}\right]d\varphi(B)+\\&+\int_{{}^{t}\varphi(B)}\left[\mathbf{B}^{u}\right]^{T}.{}^{t}a_{2}.{}^{t}p^{g}.\{\mathbf{m}\}.\{\mathbf{m}\}^{T}.\left[\mathbf{B}^{u}\right]d\varphi(B)\end{aligned} \qquad (5.6\text{-}2)$$

y:

$$\dot{\mathbf{F}}_{\text{ext}}=\int_{{}^{t}\varphi(B)}\left[\mathbf{N}^{u}\right]^{T}.\{\dot{\mathbf{b}}\}\rho.d\varphi(B)+\int_{\partial^{t}\varphi(B)}\left[\mathbf{N}^{u}\right]^{T}.\{\dot{\bar{\mathbf{t}}}\}.d\partial\varphi(B) \qquad (5.6\text{-}3)$$

donde $\boldsymbol{\beta}$ y $\mathbf{B}^{u}$ son las relaciones $\{\mathbf{L}\}$ - $\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$, según (5.4-2), y $\{\mathbf{D}\}$ - $\{\dot{\hat{\mathbf{u}}}\}$, según (5.3-7), respectivamente, pero expresados ambos en términos de $\left[\mathbf{N}^{u}\right]$. Además, el valor de las constantes se dan en (2.5-13) ó (5.3-15), y el de $[\mathbf{C}^{\tau}]$ se obtiene de (4.2-10).

5.7 INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DE (5.3-1).

Durante el párrafo 5.5 se indicó la necesidad de aprovechar la integración en el tiempo para lograr la solución paso a paso de un problema no lineal. Ahora volvemos a realizar lo mismo sobre el sistema indicado en (5.3-1) con la incorporación de la no linealidad indicada en (5.6-2). En esta ocasión nos detendremos sobre la técnica de integración por la aparición conjunta de ($\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{w},\dot{\hat{\mathbf{p}}}^{g}$) y ($\hat{\mathbf{p}}^{w},\hat{\mathbf{p}}^{g}$) en el sistema de ecuaciones. Para ello se puede recurrir al método del parámetro ϑ [9,61] aplicado, por ejemplo, a la incógnita genérica p. Así, se tiene:

$$\dot{p} = \vartheta.{}^{t+\Delta t}\dot{p} + (1-\vartheta).{}^{t}\dot{p} \tag{5.7-1}$$

con $0 \leq \vartheta \leq 1$; y considerando que: $\dot{(*)} = \dfrac{{}^{t+\Delta t}(*) - {}^{t}(*)}{\Delta t}$, se puede escribir:

$$\begin{gathered}
\left|\begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{\mathbf{sw}} & \mathbf{C}_{\mathbf{sg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{ws}} & \mathbf{P}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{wg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{gs}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{gw}} & \mathbf{P}_{\mathbf{gg}} \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} - \left|\begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{\mathbf{sw}} & \mathbf{C}_{\mathbf{sg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{ws}} & \mathbf{P}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{wg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{gs}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{gw}} & \mathbf{P}_{\mathbf{gg}} \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} + \\
+\left|\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{gg}} \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} \vartheta * \Delta t + \left|\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{gg}} \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} (1-\vartheta)\Delta t = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} \Delta t
\end{gathered} \tag{5.7-2}$$

ó

$$\begin{gathered}
{}^{t}\left|\begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{\mathbf{sw}} & \mathbf{C}_{\mathbf{sg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{ws}} & (\mathbf{P}_{\mathbf{ww}} + \mathbf{H}_{\mathbf{ww}}\vartheta\,\Delta t) & \mathbf{Q}_{\mathbf{wg}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{gs}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{gw}} & (\mathbf{P}_{\mathbf{gg}} + \mathbf{H}_{\mathbf{gg}}\vartheta\,\Delta t) \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} + \\
+\Delta t\ {}^{t}\left|\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{ww}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathbf{gg}} \end{matrix}\right| \begin{Bmatrix} {}^{t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{\mathbf{g}} \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} \vartheta\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} + (1-\vartheta)^{t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} \\ \vartheta\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{w}} + (1-\vartheta)^{t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{w}} \\ \vartheta\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} + (1-\vartheta)^{t}\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} \end{Bmatrix}
\end{gathered} \tag{5.7-3}$$

o también:

$$
{}^{t}\begin{vmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}_{sw} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{ws} & (\mathbf{P}_{ww}+\mathbf{H}_{ww}\vartheta\,\Delta t) & \mathbf{Q}_{wg} \\ \mathbf{C}_{gs} & \mathbf{Q}_{gw} & (\mathbf{P}_{gg}+\mathbf{H}_{ww}\vartheta\,\Delta t) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{u}} \\ \Delta\hat{\mathbf{p}}^{w} \\ \Delta\hat{\mathbf{p}}^{g} \end{Bmatrix} +
$$

$$
+ {}^{t}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\Delta t\,\mathbf{H}_{ww}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\Delta t\,\mathbf{H}_{gg}) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t}\hat{\mathbf{u}} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{w} \\ {}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{g} \end{Bmatrix} = {}^{t+\Delta t}\begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{F}_{s} \\ \Delta\mathbf{F}_{w} \\ \Delta\mathbf{F}_{g} \end{Bmatrix} \tag{5.7-4}
$$

La expresión (5.7-4) luego de ser montada para todo el dominio en estudio, e incluidas las correspondientes condiciones de contorno, conduce al sistema de ecuaciones algebraicas incrementales que son resueltas en forma iterativa, de acuerdo a lo discutido en la sección 3.2, debido a que el problema es no lineal. Se hace especial referencia a que las matrices son tomadas en el tiempo anterior equilibrado para el cálculo de cada incremento de las incógnitas y es por esto que en (5.3-16) a (5.3-20) se usan los incrementos del tiempo anterior.

El proceso iterativo se extiende hasta que el error o residuo $\Re$ sea menor o igual a una tolerancia preestablecida. Este residuo, análogamente a (5.5-12), se calcula para medios porosos saturados de la siguiente manera y usando notación de Voigt:

$$
\{\Re\} = \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{G}{}_{\text{ext}}\right\} - \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{G(i)}_{\text{int}}\right\} \quad (G \text{ indica general}) \tag{5.7-5}
$$

$$
\Re = \begin{Bmatrix} \left\{{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}}\right\} \\ -\Delta t\,[\mathbf{H}]_{ww}\left\{{}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{w}\right\} + \left\{\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{w}\right\} \\ -\Delta t\,[\mathbf{H}]_{gg}\left\{{}^{t}\hat{\mathbf{p}}^{g}\right\} + \left\{\Delta^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{g}\right\} \end{Bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{Bmatrix} -\int_{\Omega}[\mathbf{B}^{u}]^{\mathrm{T}}\left\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\right\} d\varphi(B) \\ -[\mathbf{C}]_{ws}\left\{{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^{t}\hat{\mathbf{u}}\right\} - \left([\mathbf{P}]_{ww} + \alpha\,\Delta t\,[\mathbf{H}]_{ww}\right)\left\{{}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{w}\right\} - [\mathbf{Q}]_{wg}\left\{{}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{g}\right\} \\ -[\mathbf{C}]_{gs}\left\{{}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(i)} - {}^{t}\hat{\mathbf{u}}\right\} - [\mathbf{Q}]_{wg}\left\{{}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{w}\right\} - \left([\mathbf{P}]_{gg} + \alpha\,\Delta t\,[\mathbf{H}]_{gg}\right)\left\{{}^{t+\Delta t}\Delta\hat{\mathbf{p}}^{g}\right\} \end{Bmatrix} \tag{5.7-6}
$$

donde $\{{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}\}$ es el vector de tensiones totales (tensiones efectivas mas presión de poros) de Cauchy, calculado a partir de (3.5-5), como:

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\left(J^{-1}\mathbf{R}.\overline{\boldsymbol{\tau}}'.\mathbf{R}^{T}\right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\left(a_1.p^{w}\mathbf{I}\right)^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\left(a_2.p^{g}\mathbf{I}\right)^{(i)} \tag{5.7-7} $$

La anterior se da en términos de la tensión co-rotacional efectiva de Kirchhoff $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ cuyo valor en la iteración (*i*) del tiempo $t+\Delta t$ es directamente la sumatoria de los incrementos de tensión efectiva hasta ese momento. El mismo tratamiento se hace para p^{w} y p^{g}.