

CAPÍTULO**4****EL MODELO NO LINEAL PARA
SUELO NO SATURADO.****4.1 OBJETIVOS.**

En esta parte del trabajo, se volcará lo expuesto en el capítulo 3 (3.10, 3.11, 3.13), a la teoría desarrollada en el párrafo 2.5 para lograr un modelo matemático no lineal que resuelva el problema de consolidación de un suelo parcialmente saturado. En el apartado 4.2, el autor introduce un análisis de las tensiones que se generan en la masa granular cuando se considera el efecto de no linealidad geométrica basando el desarrollo en los tensores que surgen naturalmente en 3.8 y los que surgen en el modelo hipoelastoplástico en configuración rotada plasmado en las ecuaciones (4.2-7) a (4.2-9).

En el apartado 4.4, se han obtenido los coeficientes para el vector de flujo apoyado en el modelo desarrollado en la referencia [23] pero ahora en términos de la tensión co-rotada de Kirchhoff para suelos saturados y en el apartado 4.6, el autor introduce una modificación a la función de tensiones mencionada para tener en cuenta el efecto de la succión, ecuaciones (4.6-1) y (4.6-2), algo indispensable para modelar plasticidad para el caso de suelos no saturados. Se termina con una discusión sobre las posibles maneras de considerar a la succión de modo de evitar la plasticidad no asociada.

4.2 LAS TENSIONES NO LINEALES EN LA MASA DE SUELO.

El estudio de tensiones en suelos totalmente o parcialmente saturado, como se viera en el capítulo 1, se realiza mediante una descomposición del tensor de tensiones en diferentes partes, la correspondiente a tensiones efectivas y la correspondiente a los poros. Esta última se descompone a su vez en la correspondiente a tensiones de la masa de agua y las correspondientes a la parte gaseosa, esto último cuando se trata de suelo no saturado.

Suelos Saturados: Para suelos saturados, el tema está ampliamente desarrollado en las referencias [23] y [53]. Simplemente se transcribirá aquí a modo de recordatorio que, al igual que en el estudio de tensiones en un sólido sin fluido, la formulación de la no linealidad puede hacerse en función de diferentes medidas de tensión:

1) Usando la tasa tensión total de Jaumann (3.5-7):

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \underbrace{\mathbf{C}^{\tau J} \cdot \mathbf{D}}_{\text{efectiva}} + \underbrace{J \cdot \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot \alpha \cdot p + J \cdot \mathbf{m} \cdot \alpha \cdot \dot{p}}_{\text{Poros}} \quad (4.2-1)$$

con

$$\alpha = 1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{C}^{\tau J} \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \quad (4.2-2)$$

siendo la constante de Biot, k_s es el módulo de rigidez volumétrica de los granos del suelo, $\mathbf{m}^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$, p presión del poro de agua y considerando al grano de suelo isotrópico. La ecuación constitutiva es

$$\mathbf{C}^{\tau J} = \mathbf{R} \mathbf{R} \overline{\mathbf{C}^{\tau}} \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T, \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau J} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \overline{C}_{mnpq}^{\tau} \text{ con } \mathbf{C}'' \cong \mathbf{0} \text{ de acuerdo a (3.10-14)}$$

2) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9) combinada con Jaumann:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} \cdot \mathbf{D} + J \cdot \mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot \alpha \cdot p + J \cdot \mathbf{m} \cdot \alpha \cdot \dot{p} \quad (4.2-3)$$

con la ecuación constitutiva de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}^{\tau} = \mathbf{C}^{\tau J} - \mathbf{C}' = \mathbf{R} \mathbf{R} \overline{\mathbf{C}^{\tau}} \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C_{ijkl}^{\tau} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \overline{C}_{mnpq}^{\tau} - C'_{ijkl} \quad (4.2-4)$$

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \tau_{jl} + \delta_{il} \tau_{jk} + \delta_{jk} \tau_{il} + \delta_{jl} \tau_{ik}) \quad (4.2-5)$$

siendo usada en (4.2-5) el tensor de Kirchhoff de tensiones totales y $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$ de acuerdo a (3.10-13). Para la constante de Biot, se usa (4.2-2).

Suelos No Saturados: Si se pretende ahora formular el problema de no linealidad para el caso de suelos no saturados, resultan las expresiones (4.2-1) y (4.2-3) un punto de partida excelente para lograrlo. La principal diferencia es el agregado de la presión del gas (aire) en el poro. Partiendo de la ecuación (2.3-4) pero formulada en término de Kirchhoff, será:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' + J.a_1.p^w \mathbf{I} + J.a_2.p^g \mathbf{I} \quad (4.2-6)$$

que sustituye a la presentada en la referencia [53] $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - J.\bar{\alpha}.p.\mathbf{I}$ (el signo no influye).

Considerando que puede formularse todo en término de tasas y repetir el procedimiento llevado a cabo en la referencia [53], se puede llegar a formas semejantes a las (4.2-1) y (4.2-3):

1) Usando la tasa de tensión total de Jaumann (3.5-7) se tiene:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\tau J} \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_1.p^w + J.\mathbf{m} \cdot a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_2.p^g + J.\mathbf{m} \cdot a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-7)$$

2) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9) combinada con Jaumann se tiene:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_1.p^w + J.\mathbf{m} \cdot a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_2.p^g + J.\mathbf{m} \cdot a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-8)$$

En las anteriores, la ecuación constitutiva para tensiones efectivas es la misma que para el caso saturado y también en el cálculo de las constantes que dependan del coeficiente de Biot (4.2-2).

Pero ahora se agrega una tercera posibilidad, más aplicable al caso de hipoelasticidad y se basa en plantear todo el sistema de tensiones en derivada de Lie:

3) Usando la tasa de tensión total de Lie (3.5-9):

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^\tau \cdot \mathbf{D} + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_1.p^w + J.\mathbf{m} \cdot a_1.\dot{p}^w + J.\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m}^T \cdot \mathbf{D}) \cdot a_2.p^g + J.\mathbf{m} \cdot a_2.\dot{p}^g \quad (4.2-9)$$

con la ecuación constitutiva planteada según (3.11-8) o (3.11-12) en lugar de (3.10-13)

$$\mathbf{C}^\tau \cong \hat{\mathbf{C}}^\tau = \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{C}^{\tau} \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}', \text{ ó } C'_{ijkl} = \hat{C}'_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \bar{C}'_{mnpq} - C'_{ijkl} \quad (4.2-10)$$

Con \mathbf{C}' según (3.11-10) y en término de tensiones **efectivas**.

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D} \boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\tau}' \mathbf{D}, \text{ ó } C'_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \tau'_{jl} + \delta_{il} \tau'_{jk} + \delta_{jk} \tau'_{il} + \delta_{jl} \tau'_{ik}) \quad (4.2-11)$$

Además deberá usarse $\hat{\mathbf{C}}^\tau$ en la constante de Biot:

$$\alpha = 1 - \frac{\mathbf{m}^T \cdot \hat{\mathbf{C}}^\tau \cdot \mathbf{m}}{9k_s} \quad (4.2-12)$$

4.3 FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA MASA DE SUELO NO SATURADO.

Recordando la ecuación (3.8-5), es posible obtener la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, pero aplicable a medios porosos no saturados. Se debe tener en

cuenta que la ecuación citada se plantea para tensiones totales. Sin embargo, en el caso de suelos no saturados, la tensión se descompone en efectiva y de poros. En concreto, se debe plantear la ecuación mecánica en término de **tensiones efectivas** pero sustituirlo en una ecuación que considera la tensión total. Para ello debemos recurrir a cualquiera de las relaciones planteadas en el párrafo anterior (4.2), prefiriéndose en este caso a la (4.2-9):

$$\int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{L} : \left[\underbrace{{}^t \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\tau}}_{total} + \underbrace{\mathbf{C}^{\tau, t} \cdot \mathbf{D}}_{efectiva} + J \cdot \mathbf{I} \cdot (\mathbf{I}^t \mathbf{D}) \cdot {}^t a_1 \cdot {}^t p^w + J \cdot \mathbf{I} \cdot {}^t a_1 \cdot \dot{p}^w + J \cdot \mathbf{I} \cdot (\mathbf{I}^t \mathbf{D}) \cdot {}^t a_2 \cdot {}^t p^g + J \cdot \mathbf{I} \cdot {}^t a_2 \cdot \dot{p}^g \right] \frac{d\varphi(B)}{J} =$$

$$= \int_{\varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \rho \cdot d\varphi(B) + \int_{\partial \varphi(B)} {}^t \delta \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}} \cdot d\partial \varphi(B) \quad (4.3-1)$$

Como se puede apreciar, se han generado nuevas integrales que deberán resolverse en forma simultánea por medio de elementos finitos.

4.4 CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS SATURADOS.

En la sección 3.14 se indicó que se dejaba pendiente el cálculo de los coeficientes del vector de flujo plástico que fuera aplicable a materiales geológicos. En esta sección se desarrollará el tema para suelos saturados y no saturados.

Para el caso de suelos saturados se ha elegido el criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado. El criterio de Estados Críticos, ha sido propuesto originalmente por Zienkiewicz et al^{66,70,71}, y modificado luego por Di Rado²³. En esta última referencia se ha detallado los fundamentos de este modelo para el caso de tensión de Cauchy, pero para este trabajo y para modelar no linealidad geométrica, es necesario re-formularlo en términos de la tensión corotada de Kirchhoff.

El criterio de Estados Críticos Modificado establece una función de fluencia $F(p', q, \theta) = 0$ expresada en término de los invariantes p' , q y θ , cuyas expresiones son:

$$p' = -\frac{I_1}{3} \quad (4.4-1)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (4.4-2)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsen \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right) \quad (4.4-3)$$

donde I_1 es el primer invariante, J_2 y J_3 son los segundo y tercer invariantes, respectivamente, del tensor desviador, los tres de las tensiones efectivas de Cauchy σ' . El valor de θ calculado a partir de (4.4-3) tiene como valores límites: $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

Expresando los invariantes en términos de la tensión efectiva co-rotada $\bar{\tau}'$, llevando en cuenta (3.14-6), (3.14-8) y (3.14-10), se obtiene:

$$\bar{p}' = -\frac{\bar{I}_1}{3} = -\frac{JI_1}{3} = Jp' \quad (4.4-4)$$

$$\bar{q} = \sqrt{3\bar{J}_2} = \sqrt{3J^2J_2} = Jq \quad (4.4-5)$$

$$\bar{\theta} = \theta = \frac{1}{3} \arcsen\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\bar{J}_3}{(\bar{J}_2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{3} \arcsen\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J^3J_3}{(J^2J_2)^{3/2}}\right) \quad (4.4-6)$$

Concretamente, el criterio de fluencia de Estados Críticos Modificado²³ puede escribirse:

$$F(p', q, \theta) = f(p', q, \theta) - g(k) = \frac{p'+a}{2} \left[\left(\frac{q}{p'+a} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2\phi^*} + 1 \right] - p_{co} = 0 \quad (4.4-7)$$

donde $g(k) = p_{co}$ es la tensión de comparación que define el límite elástico de la función de fluencia, y $(2p_{co} - a)$ es la presión inicial de preconsolidación (ver Figura 4-1). Además:

$$a = \frac{C^*}{\text{tg}\phi^*} = \frac{c}{\text{tg}\phi} \quad (4.4-8)$$

con:

$$\text{tg}\phi^* = \frac{3\text{sen}\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos\theta - \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta} \quad (4.4-9)$$

y

$$C^* = \frac{3 \cdot c \cdot \cos\phi}{\sqrt{3} \cdot \cos\theta - \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta} \quad (4.4-10)$$

siendo c y ϕ los coeficientes de cohesión y fricción interna del suelo, respectivamente.

En la Figura 4-1 se puede observar que sobre la línea de estados críticos se tiene que

$$\left[\frac{q}{(p'+a) \text{tg}\phi^*} \right] = 1, \text{ tornando al material plástico perfecto.}$$

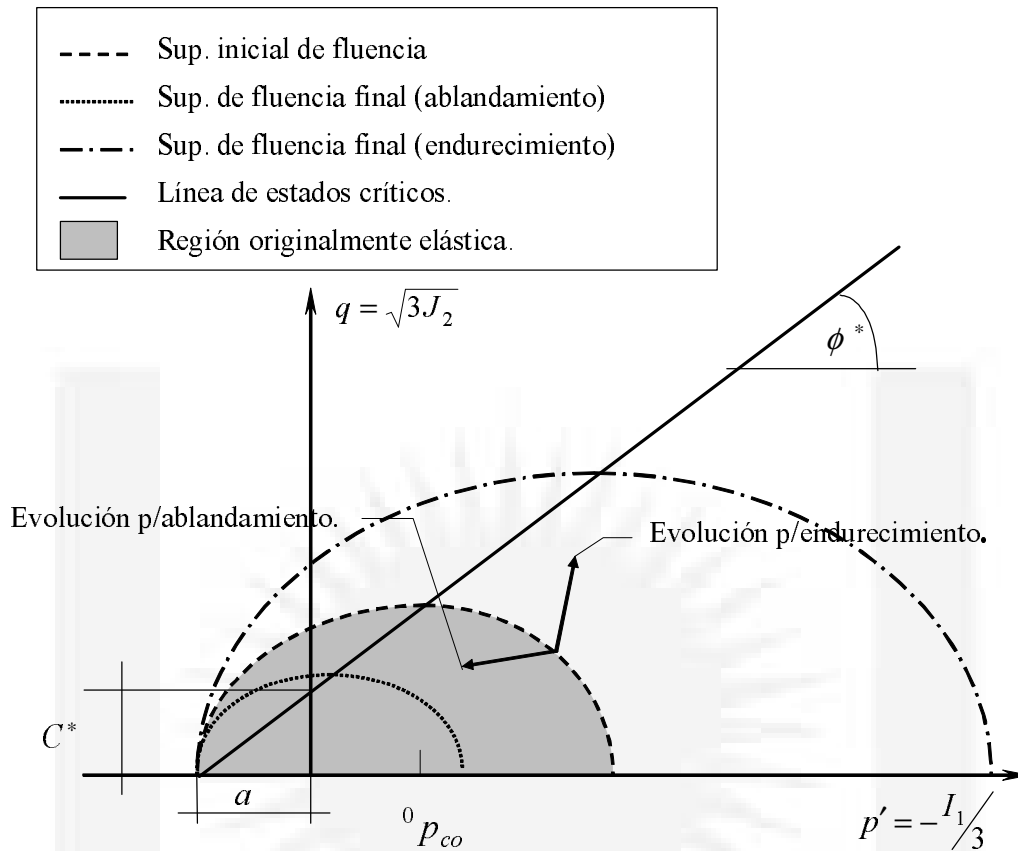


Figura 4-1: Criterio de plastificación de Estados Críticos Modificado.

El coeficiente de cohesión medido en la configuración co-rotada resulta: $\bar{c} = J.c$, mientras que el ángulo de fricción interna se mantiene inalterado, esto es: $\bar{\phi} \equiv \phi$. En consecuencia, expresando las magnitudes (4.4-8), (4.4-9) y (4.4-10) en términos de las tensiones efectivas co-rotadas, recordando además que $\bar{\theta} \equiv \theta$ según (4.4-6), se tiene:

$$\bar{a} = \frac{\bar{c}}{\text{tg}\bar{\phi}} = J.a \quad (4.4-11)$$

$$\text{tg}\bar{\phi}^* = \frac{3\text{sen}\bar{\phi}}{\sqrt{3} \cdot \cos\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi} \cdot \text{sen}\bar{\theta}} = \text{tg}\phi^* \quad (4.4-12)$$

$$\bar{C}^* = \frac{3 \cdot \bar{c} \cdot \cos\bar{\phi}}{\sqrt{3} \cdot \cos\bar{\theta} - \text{sen}\bar{\phi} \cdot \text{sen}\bar{\theta}} = J.C^* \quad (4.4-13)$$

La función de fluencia para endurecimiento isotrópico, resulta:

$$\bar{F}(\bar{\tau}, \bar{k}) = \bar{f}(\bar{\tau}) - \bar{g}(\bar{k}) = 0 \quad (4.4-14)$$

donde $\bar{g}(\bar{k})$ es la tensión de comparación, dependiente de una única variable \bar{k} de endurecimiento, que define el límite elástico de la función de fluencia. Esta tensión de comparación es un parámetro que depende del material, y no depende de la rotación de las tensiones, es decir, su valor es el mismo si se mide sobre la configuración actual deformada o sobre la configuración co-rotada pero si debe tenerse en cuenta la relación entre el tensor de tensiones de Kirchhoff y el de Cauchy:

$$\bar{g}(\bar{k}) = J \cdot g(k) \Rightarrow \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = J \cdot f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.4-15)$$

Análogamente a lo visto en (4.4-14), la tensión de comparación p_{co} será:

$$\bar{g}(\bar{k}) \equiv Jg(k) = Jp_{co} \Rightarrow \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = J \cdot f(p', q, \theta) \quad (4.4-16)$$

siendo $\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})$ la función de fluencia definida en términos de las tensiones efectivas co-rotadas $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) &= \frac{\bar{p}' + \bar{a}}{2} \left[\left(\frac{\bar{q}}{\bar{p}' + \bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} + 1 \right] \\ &= J \cdot \frac{Jp' + Ja}{2} \left[\left(\frac{Jq}{Jp' + Ja} \right)^2 \frac{1}{\text{tg}^2 \phi^*} + 1 \right] \\ &= f(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta}) = J \cdot f(p', q, \theta) \end{aligned} \quad (4.4-17)$$

donde se tuvieron en cuenta las (4.4-4), (4.4-5), (4.4-11) y (4.4-12).

El vector de flujo plástico $\bar{\mathbf{a}}$ se desarrolla en función de $\bar{\boldsymbol{\tau}}'$ según (3.14-3), y sus términos $\bar{\mathbf{a}}_i$ lo hacen según (3.14-4), en tanto que las constantes \bar{C}_i , para el criterio de Estados Críticos Modificado, quedan definidos como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{1}{6} \left\{ \left[\frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \bar{\phi}^*} \right]^2 - 1 \right\} \\ \bar{C}_2 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\bar{J}_2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \text{tg} \bar{\phi}^*} \left[\frac{3}{\text{tg} \bar{\phi}^*} + \text{tg} 3\bar{\theta} \frac{(\sqrt{3} \text{sen} \bar{\theta} + \text{cos} \bar{\theta} \text{sen} \bar{\phi})}{\text{sen} \bar{\phi}} \right] \\ \bar{C}_3 &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}} = \frac{1}{2 \cdot \text{cos} 3\bar{\theta}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a}) \cdot \text{tg} \bar{\phi}^* \cdot \bar{J}_2} \left(\frac{\sqrt{3} \text{sen} \bar{\theta} + \text{cos} \bar{\theta} \text{sen} \bar{\phi}}{\text{sen} \bar{\phi}} \right) \end{aligned} \quad (4.4-18)$$

En el caso que θ adopte los valores límites anteriormente señalados, $\theta = \pm 30^\circ$, las constantes \bar{C}_2 y \bar{C}_3 vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{C}_2|_{\theta=\pm 30^\circ} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\bar{q}}{(\bar{p}' + \bar{a})} \left[\frac{1}{\text{sen}^2 \phi} \left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \text{sen} \phi \right)^2 \right] \\ \bar{C}_3|_{\theta=\pm 30^\circ} &= 0\end{aligned}\quad (4.4-19)$$

La evolución de la superficie de fluencia en términos del tensor de Cauchy, sea ésta un endurecimiento o un ablandamiento, se calcula con la siguiente ecuación:

$$p_{co} = {}^0 p_{co} \cdot \exp(\chi \cdot \varepsilon_v^P) \quad (4.4-20)$$

siendo ${}^0 p_{co}$ la pre-consolidación inicial (ver Figura 4-1), ε_v^P la deformación volumétrica plástica total y χ un coeficiente dado por:

$$\chi = -\beta \frac{1 + e_0}{\omega - K} \quad (4.4-21)$$

donde e_0 es la relación inicial de vacíos, ω y K son los índices de compresión y expansión respectivamente definidos a partir de ensayos odométricos y β es una variable adimensional de endurecimiento introducida en la referencia [24] y que debe ser ajustada en función del tipo de suelo, pero su valor es del orden de ${}^0 p_{co}$.

Cuando se trata de la configuración rotada, los parámetros medidos en ensayos no sufren alteración. La deformación volumétrica merece una reflexión adicional: ésta queda definida a partir de (3.13-5), pero en la configuración sin rotar, como:

$$d\varepsilon_v^P = d\Lambda \frac{\partial f(p', q, \theta)}{\partial (I_1/3)} \quad (4.4-22)$$

donde $d\Lambda$ es el multiplicador plástico.

Sin embargo, para el caso de configuración co-rotada, la ecuación (4.4-22), se puede escribir:

$$d\bar{\varepsilon}_v^P = d\bar{\Lambda} \frac{\partial \bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})}{\partial (\bar{I}_1/3)} \quad (4.4-23)$$

Así, la deformación volumétrica puede ser calculada a partir de las variables en el espacio co-rotado sin perder exactitud.

Derivando $\bar{f}(\bar{p}', \bar{q}, \bar{\theta})$, dada en (4.4-17), respecto a $\bar{p}' = (\bar{I}_1/3)$, se puede escribir:

$$d\bar{\varepsilon}_v^P = d\bar{\Lambda} \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) \quad (4.4-24)$$

y también:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_v^P}{d\bar{\Lambda}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) \quad (4.4-25)$$

con $\text{tg} \bar{\phi}^*$ definida en (4.4-9) igual a $\text{tg} \bar{\phi}^*$ por la ecuación (4.4-12) y siendo:

$$\eta = \frac{q}{(p'+a)} = \frac{J^{-1} \cdot \bar{q}}{J^{-1} \cdot (\bar{p}'+\bar{a})} = \bar{\eta} \quad (4.4-26)$$

Volviendo a la expresión (4.4-20) en términos de l tensor de Cauchy, si se aplica logaritmo natural y diferencian ambos miembros, se deduce la relación entre la variación de la presión p_{co} y la deformación volumétrica ε_v^P :

$$\frac{dp_{co}}{p_{co}} = \chi \cdot d\varepsilon_v^P \quad (4.4-27)$$

pasando p_{co} a la izquierda y $d\varepsilon_v^P$ a la derecha, se obtiene:

$$\frac{dp_{co}}{d\varepsilon_v^P} = p_{co} \cdot \chi \quad (4.4-28)$$

que en espacio co-rotado será:

$$\frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\varepsilon}_v^P} = \bar{p}_{co} \cdot \chi \quad (4.4-29)$$

Las expresiones (4.4-29) y (4.4-24), son las utilizadas para el cálculo del parámetro \bar{A} , definido en (3.13-9), que para este criterio de plastificación y considerando que: $d\bar{k} = d\bar{\varepsilon}_v^P$ (“strain hardening” en su terminología inglesa), resulta:

$$\bar{A} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{k}} \frac{d\bar{k}}{d\bar{\Lambda}} = \frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\Lambda}} = \frac{d\bar{p}_{co}}{d\bar{\varepsilon}_v^P} \frac{d\bar{\varepsilon}_v^P}{d\bar{\Lambda}} = \frac{\bar{p}_{co}}{2} \chi \left(\frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \bar{\phi}^*} - 1 \right) = J \frac{p_{co}}{2} \chi \left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) = J \cdot A \quad (4.4-30)$$

Como puede observarse, al igual que $\bar{g}(\bar{k}) = J \cdot g(k) = J \cdot p_{co}$, este parámetro también es una magnitud configuracionalmente independiente pero afectada por el determinante del Jacobiano.

4.5 ALGORITMO DE RETORNO. MÉTODO DE PLANO CORTANTE.

Para el cálculo de las deformaciones plásticas y del multiplicador plástico, se ha utilizado el algoritmo de retorno de plano cortante⁶¹ pero lo particularizaremos para el caso de suelo con endurecimiento isotrópico.

El algoritmo se basa en integraciones explícitas en torno a un intervalo $\Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)}$ de longitud (dentro de una iteración plástica). Para ello, se dirá que el incremento de tensiones para el paso de carga $(t+\Delta t)$, viene dado por (3.13-2) y (3.13-5), pero en forma discreta:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\tau} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{C}^\tau : \left(\bar{\epsilon}^{(j+1)} - \bar{\epsilon}^{P(j)} \right) \Big|_{t+\Delta t} = \bar{C}^\tau : \left(\bar{\epsilon}^{e(j+1)} + \bar{\epsilon}^{P(j+1)} - \bar{\epsilon}^{P(j)} \right) \Big|_{t+\Delta t} \\ \frac{d\Delta \bar{\tau}}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{C}^\tau : \frac{d \left(\bar{\epsilon}^{e(j+1)} + \bar{\epsilon}^{P(j+1)} - \bar{\epsilon}^{P(j)} \right)}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \\ &= \bar{C}^\tau : \frac{d \left(\bar{\epsilon}^{P(j+1)} - \bar{\epsilon}^{P(j)} \right)}{d\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \bar{C}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\tau}, \bar{g})}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.5-1)$$

Integrando explícitamente (apoyada en la iteración anterior, j) la última expresión de (4.5-1), queda:

$$\Delta \bar{\tau}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \cdot \left(-\bar{C}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\tau}, \bar{g})}{\partial \bar{\tau}} \right) \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-2)$$

Aplicando igual tratamiento a la variable de endurecimiento, debemos partir de la expresión (4.4-30) en forma discreta, quedando ahora:

$$\frac{\Delta \bar{p}_{co}}{\Delta \bar{A}} \Big|_{t+\Delta t} = \bar{A} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\bar{p}_{co}}{2} \chi \left(\frac{\bar{\eta}^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-3)$$

que también puede ser escrita, considerando la iteración en curso como en (4.5-2):

$$\Delta \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \cdot \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-4)$$

También es condición:

$$\bar{F}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad (4.5-5)$$

que desarrollado en serie de Taylor lineal (para $\bar{g}(\bar{k}) = \bar{p}_{co}$):

$$\bar{F}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\tau}, \bar{g})}{\partial \bar{\tau}} \cdot \Delta \bar{\tau}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\tau}, \bar{g})}{\partial \bar{g}} \cdot \Delta \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = 0 \quad (4.5-6)$$

Reemplazando (4.5-2) y (4.5-4) en (4.5-6), y despejando el incremento de multiplicador plástico, queda:

$$\Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} = \frac{\bar{F}^{(j)}}{\frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \bar{\mathbf{C}}^\tau : \frac{\partial \bar{F}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g})}{\partial \bar{g}} + \bar{A}^{(j)}} \Big|_{t+\Delta t} \quad (4.5-7)$$

Una vez obtenido este valor, debe procederse a actualizar las deformaciones plásticas, el multiplicador plástico y las tensiones:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} &= \Delta \bar{A}^{(j-1)} \Big|_{t+\Delta t} + \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} + \bar{\mathbf{C}}^\tau \left[\Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \bar{\mathbf{a}}^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{g}) \right] \Big|_{t+\Delta t} \\ \bar{p}_{co}^{(j+1)} \Big|_{t+\Delta t} &= \bar{p}_{co}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} + \Delta^{(2)} \bar{A}^{(j)} \cdot \bar{A}^{(j)} \Big|_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.5-8)$$

Esta presentación teórica se ha formulado como algoritmo en la sección 0.

4.6 INTRODUCCIÓN A UN CRITERIO DE PLASTIFICACIÓN PARA SUELOS NO SATURADOS.

Para el caso de suelos no saturados, la literatura nos muestra una gran cantidad de modelos desarrollados, muchos de ellos a partir de suelos saturados^{1,27}. La principal diferencia entre modelos para suelos saturados y no saturados radica en que, a través de ensayos de laboratorios, se ha podido detectar una fuerte influencia de la succión^{17,29} en el proceso de plastificación afectando directamente el modelo constitutivo del suelo.

A los efectos de esta tesis, no se profundizará demasiado en este tema y simplemente se detallará una posible modificación al modelo visto en el párrafo 4.4 para suelos saturados²⁴ y se resolverán ejemplos sencillos para pequeñas deformaciones.

Las modificaciones fundamentales se refieren al manejo del endurecimiento y a la función de tensiones propiamente dicha. Mientras que en el caso saturado el endurecimiento era exclusivamente isotrópico, ahora se plantea una expansión isotrópica combinada con una cinemática. Además, tanto la expansión como el desplazamiento de la superficie, se verán afectados por los valores de succión.

Ahora bien, la inclusión de la succión puede ser tratada de dos maneras diferentes:

1) Como una variable más en la función de tensiones, que pasaría a ser función de tensiones y de la succión.

2) Como un parámetro de endurecimiento más.

Pero en cualquiera de los casos se enfrenta un problema inmediato: La teoría de estados críticos establece que sobre la Línea de Estados Críticos (L.E.C.), no debe haber incremento de la deformación volumétrica plástica²³. Esto equivale a decir que la succión podrá intervenir en el proceso pero sin provocar, sobre la mencionada línea, deformaciones plásticas. Para cumplir con esto, tendremos ahora dos salidas:

a) Hacemos uso de la opción (1) anterior y utilizamos como potencial plástico otra función que no dependa de la succión. El problema es que la plasticidad no asociada lleva a formulaciones no simétricas por la pérdida de simetría de la matriz elastoplástica⁴¹.

b) Hacemos uso de la opción (2) anterior y asumimos independencia del multiplicador plástico con relación al parámetro de endurecimiento “succión”.

Es claro que esta última instancia puede ser considerada en algún aspecto contradictoria como se verá a continuación, pero no es un error mayor que el que introduce la plasticidad no asociada al no cumplir con el principio de máxima disipación plástica⁶¹. Además, la modificación respeta las bases de la teoría de estados críticos y responde a los experimentos en los que se indica que la succión debe ser incluida en la función de tensiones.

Tenemos entonces que la expansión cinemática de la superficie se consigue modificando el coeficiente de α de (4.4-8) de modo que dependa del valor actual de la succión p^c , mas específicamente del valor $\|p^c - {}^0p^c\|$ siendo ${}^0p^c$ el valor inicial de la succión. La inclusión de las barras de valor absoluto se basa en que, de esta manera, el modelo numérico se torna más estable ante las oscilaciones de la succión. Además, se introduce un nuevo coeficiente k , de manera que el nuevo valor de α sea:

$$\alpha = \frac{c}{\operatorname{tg}\phi} + \|p^c - {}^0p^c\| k \quad (4.6-1)$$

El efecto será un desplazamiento hacia la izquierda de la superficie de fluencia y de la línea de estados críticos a medida que aumenta la succión. Si esta disminuye, la superficie de fluencia será la correspondiente a suelos saturados. Autores como Xikui Li et al⁶⁷, proponen metodologías semejantes. Sin embargo resultados experimentales^{17,27} demuestran que el in-

cremento de la succión debe corresponderse con un incremento en la superficie de fluencia, restando validez a esta expansión cinemática propuesta.

Para responder a los resultados experimentales, se modifica a la expansión isotrópica de modo de que dependa de la succión modificando el término p_{co} (4.4-20) y el módulo de endurecimiento, A (en vez de \bar{A} por ser pequeñas deformaciones), de (4.4-30):

$$A = \frac{p_{co} + H_w}{2} \chi \left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (4.6-2)$$

que surge de sustituir la ecuación (4.4-20) por:

$$p_{co}^* = (p_{co} + H_w) \cdot \exp(\chi \cdot \varepsilon_v^p) \quad (4.6-3)$$

teniendo siempre en cuenta que

$$\frac{\partial p_{co}^*}{\partial \varepsilon_v^p} = \frac{\partial p_{co}}{\partial \varepsilon_v^p} \quad (4.6-4)$$

En la expresión (4.6-3), se supone que H_w varía en forma lineal con la succión:

$$H_w = \|m \cdot (p^c - p^c)\| \quad (4.6-5)$$

pudiendo proponerse otro tipo de variación según el suelo²⁷.

Sin embargo, para justificar (4.6-2), se debe reemplazar la expresión (4.6-4) en la versión de la (4.4-30) para espacios sin co-rotar:

$$A = - \frac{\partial F}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} = \frac{\partial g}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} = \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k} \frac{dk}{d\Lambda} \quad (4.6-6)$$

Además habrá que aplicar la condición de consistencia para dos parámetros y asumir que el primero es $k_1 = \varepsilon_v^p$ y el segundo es $k_2 = \|p^c - p^c\|$:

$$A = \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k_1} \frac{dk_1}{d\Lambda} + \frac{\partial p_{co}^*}{\partial k_2} \frac{dk_2}{d\Lambda} \quad (4.6-7)$$

Si se toma:

$$\frac{dk_2}{d\Lambda} = 0 \quad (4.6-8)$$

Usando la (4.4-25) sin co-rotar, quedará:

$$\frac{dp_{co}^*}{d\varepsilon_v^p} \frac{d\varepsilon_v^p}{d\Lambda} = \frac{p_{co}^*}{2} \chi \left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1 \right) \quad (4.6-9)$$

Así, no habrá expansión volumétrica ni endurecimiento cuanto se toca la L.E.C. al permanecer el coeficiente $\left(\frac{\eta^2}{\text{tg}^2 \phi^*} - 1\right)$ como multiplicador. Es claro que asumir validez para la (4.6-8) es contradictorio con la expresión (3.13-10) ya que el parámetro, A , aparece como denominador del multiplicador plástico y a su vez recibe influencia de la succión. Sin embargo, nuevamente, esta inconsistencia no se considera de mayor orden que el introducido por a plasticidad no asociada.

4.7 EVOLUCIÓN DEL MODELO. REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

A los modelos elastoplásticos comúnmente se los representa en el espacio de Haig Westergaard para analizar su evolución con las tensiones principales. Para el caso de modelos de estados críticos y tal como se hiciera en la Figura 4-1, se usa como referencia al primer invariante del tensor efectivo y al segundo invariante del tensor desviador de tensiones.

A continuación se presentan sendos gráficos en los que se puede observar como afectan a la representación del modelo en la curva $p'-q$, distintos valores de la succión. En la Figura 4-2 se puede observar el efecto de la succión p^c en el endurecimiento cinemático según (4.6-1). En cambio, en la Figura 4-3 el efecto de la succión es aplicado como endurecimiento isotrópico (4.6-5). Es claro que se ha pensado el modelo de modo que ambos efectos actúen en conjunto generando un endurecimiento mixto tal como se aprecia en la Figura 4-4.

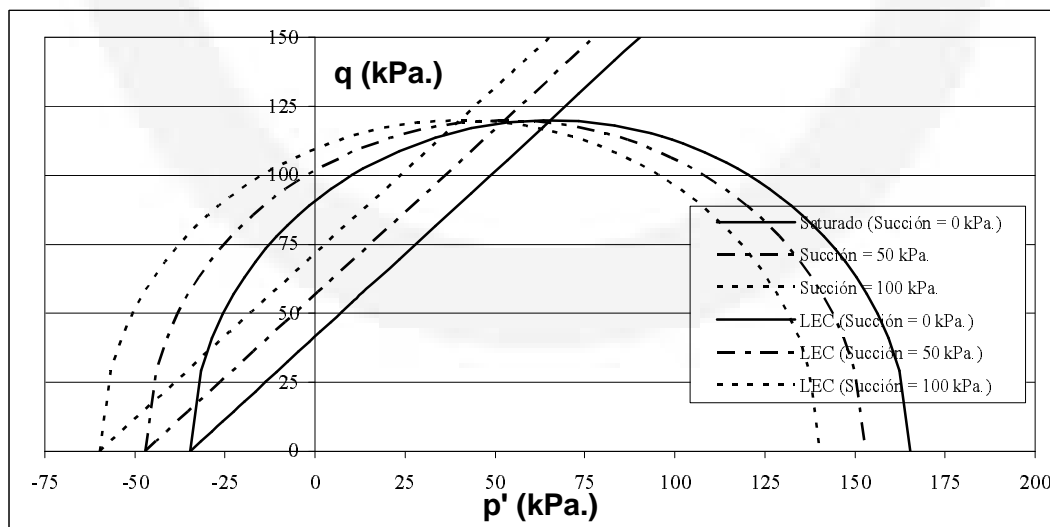


Figura 4-2 Efecto del endurecimiento cinemático.

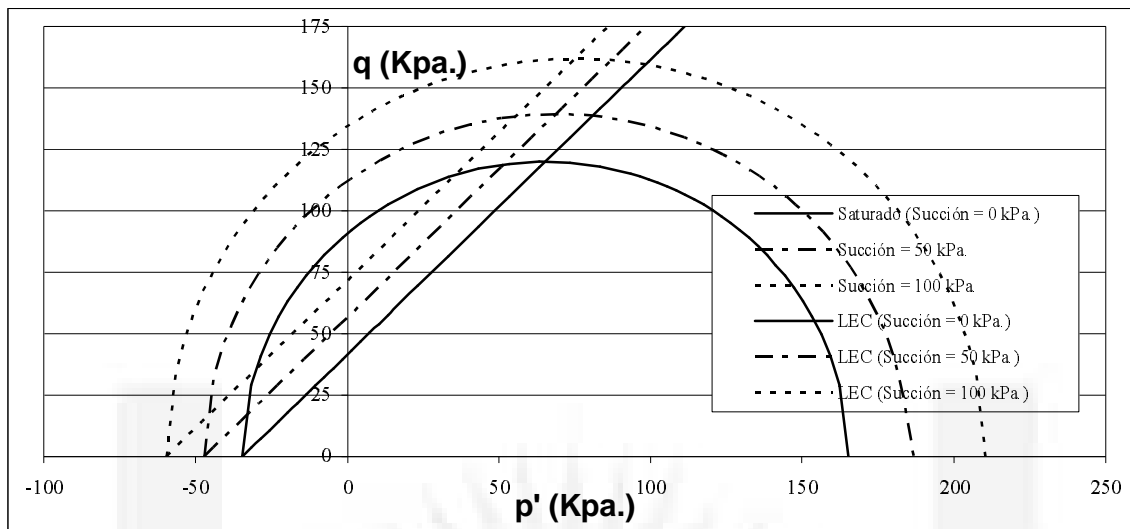


Figura 4-3 Efecto del endurecimiento isotrópico.

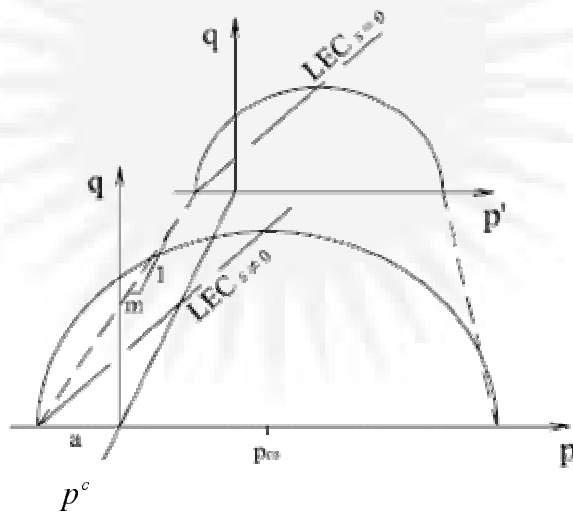


Figura 4-4. Combinación de efectos: endurecimiento mixto.

4.8 CONSIDERACIONES PARA ESPACIOS CO-ROTADOS.

Todo lo anterior no se ve mayormente alterado cuando se formula el modelo en espacios co-rotados, ya que se el modelo, así como se ha presentado en la sección anterior, se basa en la validez de (4.6-8). Sin embargo, no se entrará en detalles y el tema seguirá siendo estudiado en el futuro en proyectos del Departamento de Mecánica Aplicada y en concordancia con lo que se expondrá en el apartado 8.3.

