# CAPÍTULO 3

# NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA Y PLASTICIDAD GENERAL.

## 3.1 OBJETIVOS.

En la primera parte de este capítulo, se realiza un repaso general de los conceptos principales que son necesarios para abordar el problema de no linealidad geométrica. Se presentan diferentes tensores de deformación, posteriormente los correspondientes de tensión y las relaciones principales entre ellos.

En el párrafo 3.10, se describe un modelo no lineal geométrico hipoelástico basado en magnitudes co-rotadas con aplicación a materiales en general. Este tipo de formulación lleva a ecuaciones constitutivas no simétricas tal como se indica en las referencias [9] y [61]. En este trabajo, el autor presenta en el párrafo 3.11, una sustitución en uno de los tensores que surgen del análisis anterior (ecuación (3.11-6)) que permite una descomposición aditiva en un simétrico y antisimétrico (ecuación (3.11-9)) ofreciendo una solución al problema de simetría dentro de ciertos límites. Este modelo fue iniciado con la colaboración de Juan Manzollillo[53] y terminado de implementar en computador durante la presente tesis además de expandirlo para problemas ortotrópicos y tridimensional.

En la segunda parte, se aborda brevemente el problema plástico en general haciendo un repaso de la teoría. A posteriori se extiende el análisis hasta abarcar la formulación en términos de tensiones co-rotadas. Se finaliza con algún comentario sobre plasticidad e isotropía.

## 3.2 EL ANÁLISIS NO LINEAL.

El análisis de materiales en general debe separarse entre Lineales y No Lineales. Cuando la deformación de un cuerpo sometido a cargas externas es infinitesimalmente pequeña, y la relación entre las tensiones y las deformaciones es linealmente elástica, las cargas y los desplazamientos del cuerpo mantienen en todo momento una relación lineal. Cuando alguno de los supuestos anteriores no se cumple, las cargas y los desplazamientos seguirán una relación no lineal.

Dentro de los problemas no lineales de la mecánica de los sólidos se puede distinguir dos grandes grupos: la No Linealidad Física, y la No Linealidad Geométrica. La No Linealidad Física, también llamada No Linealidad del Material, se presenta cuando la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones va cambiando para distintos niveles de carga, es decir, no es constante a lo largo del proceso de deformación. La no Linealidad Geométrica, en cambio, aparece cuando el cuerpo experimenta grandes desplazamientos o deformaciones, que producen cambios significativos en su configuración geométrica al avanzar el proceso de carga.

Por supuesto que existen otros tipos de no linealidad como por ejemplo la que aparece en la mecánica de los sólidos por cambio en las condiciones de borde (o contorno) a lo largo del proceso de deformación, pero no serán aquí abordadas.

El problema básico en el análisis no lineal, es encontrar la configuración carga – desplazamiento que garantice el equilibrio del cuerpo en cualquier instante de tiempo. Esta definición no permite a priori detectar la diferencia con un caso lineal, sin embargo la diferencia subyace en el hecho que tanto la geometría como las características mecánicas del material no permanecen constantes a lo largo de ese tiempo como sí ocurría en el caso lineal. Utilizando la nomenclatura discreta (entiéndase "discreta" o "en ciertos puntos elegidos del continuo") que ofrece elementos finitos (se verá en detalle en 5.2), se busca obtener en cada instante $t+\Delta t$ el equilibrio entre las cargas nodales externas ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}}$ y las fuerzas nodales correspondientes a las tensiones internas del cuerpo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}}$.

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} = \mathbf{0} \tag{3.2-1} $$

En todo análisis considerando no linealidad geométrica, el equilibrio del sistema debe ser alcanzado sobre la geometría actual o deformada del cuerpo. Obviamente, como esta es aún desconocida, el equilibrio se plantea gradualmente (en forma iterativa) sobre configuraciones intermedias que terminan llevando a la configuración definitiva, tras aceptar un cierto valor de error.

Los problemas a resolver durante la presente son los denominados "dependientes de la trayectoria", en los que se requiere resolver la (3.2-1) en todo el rango de tiempo precedente, para lo cual se utiliza una solución incremental paso a paso. Esto es debido a que se incluye el problema plástico y al modo en que se ha elegido resolver el problema no lineal geométrico, como se verá más adelante.

En la solución incremental paso a paso se asume que la solución para el tiempo $t$ es conocida y que la relación carga – desplazamiento en el incremento de tiempo $\Delta t$ es lineal:

$$ {}^{t}\mathbf{K}.\Delta\hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t}\mathbf{F}_{\text{int}} \tag{3.2-2}$$

donde ${}^{t}\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos, tangente a la relación carga – desplazamiento, y $\Delta\hat{\mathbf{u}}$ es el incremento de desplazamientos nodales (o respuesta) que experimenta el cuerpo en el intervalo $\Delta t$ debido al incremento $\Delta\mathbf{F}_{\text{ext}}$ de las cargas externas:

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{ext}} = {}^{t}\mathbf{F}_{\text{ext}} + \Delta\mathbf{F}_{\text{ext}} \tag{3.2-3}$$

Los desplazamientos nodales al tiempo $t+\Delta t$ resultan:

$$ {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{u}} = {}^{t}\hat{\mathbf{u}} + \Delta\hat{\mathbf{u}} \tag{3.2-4}$$

pudiéndose calcular también las tensiones y fuerzas nodales internas:

$$ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{\text{int}} = {}^{t}\mathbf{F}_{\text{int}} + \Delta\mathbf{F}_{\text{int}} \tag{3.2-5}$$

donde $\Delta\mathbf{F}_{\text{int}}$ es el incremento de las fuerzas internas en el intervalo $\Delta t$. Debido a que el comportamiento real del cuerpo es no lineal, la solución anterior está sujeta a errores, cuya magnitud depende del tamaño del paso de tiempo $\Delta t$ (o de carga) utilizado, por lo tanto será necesario iterar hasta que la solución (3.2-1) sea alcanzada con suficiente precisión. Los métodos de iteración ampliamente utilizados en los análisis no lineales de elementos finitos están basados en la técnica de Newton–Raphson. En este trabajo en particular se optó por utilizar la técnica de Newton–Raphson Modificado[6]

## 3.3 LA DEFORMACIÓN.

Una descripción detallada de este tema puede verse en Simo & Hughes[61](capítulo 7). Se llama deformación al movimiento total que sufre una fibra de material, el cual es resultado de desplazamientos más deformaciones específicas (o elongaciones) de la fibra. El movimiento o deformación del cuerpo se describe por una función $\varphi(\mathbf{X},t)$ que representa la posición espacial de la partícula, como una función del tiempo, a través de las coordenadas espaciales o Eulerianas, dadas por:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X},t) \tag{3.3-1}$$

con $\mathbf{X}$ las coordenadas materiales o referenciales y $t$ el tiempo.

Luego, el desplazamiento de una partícula es la diferencia entre su posición actual y original:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},t) = \varphi(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} \tag{3.3-2}$$

La descripción de la deformación depende de la elección de las variables independientes, es decir, si se colocan las variables del problema en función de las coordenadas materiales, se tendrá una descripción Lagrangiana, en cambio, si las variables dependientes están en función de las coordenadas espaciales, resultará una descripción Euleriana. La elección del marco para describir la deformación llevará también consecuencias sobre la malla de elementos finitos a usar:

Malla Lagrangiana de elementos finitos: está fija en las coordenadas materiales, es decir está 'pegada' a la materia, en consecuencia los elementos se deforman junto con el material, permaneciendo la malla coincidente con el cuerpo a lo largo de toda la deformación. Esto puede producir severas distorsiones en los elementos, por lo tanto resulta útil cuando es limitada la magnitud de la deformación que puede ser simulada. Es la más natural y efectiva a ser utilizada en problemas de mecánica de sólidos.

Malla Euleriana: está fija en las coordenadas espaciales, manteniéndose la forma y tamaño de los elementos constantes a lo largo de la deformación. Por supuesto, la malla no permanece coincidente con el cuerpo y se produce traspaso de materia a través de los contornos de los elementos. Tiene mayor aplicación en problemas de mecánica de fluidos, donde se estudia el comportamiento de la materia que atraviesa un volumen de control estacionario

Malla ALE[9]: Usada en problemas de interacción fluido estructura y casos similares ya que permite la transición entre los dos tipos mencionados.

Para este trabajo se adoptó la descripción "Lagrangiana Actualizada": Las medidas de tensiones, deformaciones, derivadas e integrales se realizan sobre las coordenadas espaciales o Euleriana, es decir, las variables están descriptas en la configuración actual pero la malla de elementos finitos es Lagrangiana, es decir, permite que se realicen derivadas totales sobre magnitudes espaciales sin tener que recurrir a derivadas convectivas[9].

## 3.4 MEDIDAS DE DEFORMACIONES.

Brevemente se mencionarán algunos tensores de deformación muy usados:

**Gradiente de deformación**:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t)=\frac{\partial\varphi(\mathbf{X},t)}{\partial\mathbf{X}}\equiv\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}},\ \text{ó}\ \ F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{3.4-1}$$

Describe todas las deformaciones específicas (o elongaciones), desplazamientos y rotaciones que sufre una fibra de material desde la configuración original o de referencia (tiempo 0) hasta la configuración deformada actual (tiempo $t$). Así, por la regla de diferenciación en cadena, la fibra de material, de longitud $d\mathbf{X}$ en la configuración de referencia, en el tiempo $t$ está dada por:

$$d\mathbf{x}=\mathbf{F}(\mathbf{X},t).d\mathbf{X} \tag{3.4-2}$$

o, inversamente, también se puede escribir:

$$d\mathbf{X}=[\mathbf{F}(\mathbf{X},t)]^{-1}.d\mathbf{x} \tag{3.4-3}$$

donde:

$$[\mathbf{F}(\mathbf{X},t)]^{-1}=\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\varphi(\mathbf{X},t)}\equiv\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\mathbf{x}} \tag{3.4-4}$$

Una importante propiedad del gradiente de deformación es que puede ser descompuesto en un único producto de dos tensores, un tensor simétrico definido positivo **U**, llamado tensor derecho de elongaciones, y un tensor ortogonal **R**, llamado tensor rotacional:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t)=\mathbf{R}(\mathbf{X},t)\mathbf{U}(\mathbf{X},t) \tag{3.4-5}$$

Por el principio de conservación de masa, que expresa la indestructibilidad e impenetrabilidad de la materia, el determinante del gradiente de deformación, también conocido como determinante Jacobiano[48], viene dado por:

$$J(\mathbf{X},t)=\det[\mathbf{F}(\mathbf{X},t)]\equiv\frac{d\varphi(B)}{dB}=\frac{\rho_0}{\rho}>0 \tag{3.4-6}$$

donde $\rho_0$ es la densidad de masa en la configuración inicial $B$ y $\rho$ es la densidad de masa en la configuración actual $\varphi(B)$. La tasa (o derivada material) del determinante Jacobiano

$$\dot{J}=J\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=J\mathrm{div}(\mathbf{v}) \tag{3.4-7}$$

donde $v_i$ son las componentes de la velocidad **v**.

**Tensor de deformación de Green:**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \tag{3.4-8}$$

**Gradiente espacial de velocidad L**

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}\text{ , ó }\ L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{3.4-9}$$

Por la regla de diferenciación en cadena, también se puede escribir:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \tag{3.4-10}$$

Además se cumple que $\dot{J} = J\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = J\ \text{traza}(\mathbf{L})$

**Tasa de deformación o velocidad de deformación. Tensores de rotación:**

El gradiente espacial de velocidad puede ser descompuesto aditivamente en una parte simétrica **D** y otra antisimétrica **W**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \tag{3.4-11}$$

donde **D** es el tensor velocidad de deformación y **W** es el tensor de giro (o tensor vorticidad), dados por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\right)\text{, ó }\ D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.4-12}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T\right)\text{, ó }\ W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.4-13}$$

**Tasa de deformación co-rotada:**

Es una medida de deformación muy utilizada en el análisis no lineal de materiales sin isotropía, y viene dada por:

$$\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R} \tag{3.4-14}$$

**Tasa de la deformación logarítmica simétrica**

Para definir la tasa, debemos definir primero a la deformación logarítmica[51] simétrica como:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\ln \mathbf{U} + (\ln \mathbf{U})^T\right] \tag{3.4-15}$$

La tasa será

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}) \qquad (3.4\text{-}16)$$

**Tensores de deformación incrementales**

En el cálculo incremental será necesario definir algunos tensores de deformación expresados como incrementos y no en tasas. Así surgen, por ejemplo, el tensor gradiente espacial del incremento de desplazamientos, definido análogamente a (3.4-9) como:

$$\nabla\Delta\mathbf{u} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}, \text{ ó } \Delta u_{i,j} = \frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j} \qquad (3.4\text{-}17)$$

La parte simétrica de este tensor es el incremento de deformación lineal espacial, definida sobre la configuración actual deformada, y cuya expresión, análogamente a (3.4-12), está dada por:

$$\Delta\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla\Delta\mathbf{u} + \nabla\Delta\mathbf{u}^T), \text{ ó } \Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\Delta u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.4\text{-}18)$$

**Tensores tasa de deformación incremental**

Expresando (3.4-18) en forma de tasas, y recordando la (3.4-14), se obtiene:

$$\frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta t} = \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\nabla\frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta t} + \nabla\frac{\Delta\mathbf{u}^T}{\Delta t}), \text{ ó } \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.4\text{-}19)$$

**Relaciones entre magnitudes:**

a) Teniendo en cuenta (3.4-5), tomando la tasa de $\mathbf{F}$ se tiene:

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{F} = \left(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\right)\mathbf{F} = \\ &\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T\end{aligned} \qquad (3.4\text{-}20)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es un tensor de giro antisimétrico, expresado como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = \mathbf{L} - \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T, \text{ ó } \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{R}\,\text{antisim}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\right)\mathbf{R}^T \qquad (3.4\text{-}21)$$

Usando la (3.4-10) y la segunda de (3.4-20), se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right)\mathbf{R}^T \qquad (3.4\text{-}22)$$

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right)\mathbf{R}^T \qquad (3.4\text{-}23)$$

Se observa inmediatamente que para una variación como cuerpo rígido del movimiento, esto es $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$, resulta $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$.

b) En contraste con la deformación de Green, la velocidad de deformación es una medida en tasas. Tomando la derivada en el tiempo de (3.4-8), y llevando en cuenta a (3.4-10) y (3.4-12), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2}\mathbf{F}^T(\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F} \qquad (3.4\text{-}24)$$

Esta última expresión es similar a la deformación usada en teoría infinitesimal excepto que involucra derivadas sobre la configuración actual deformada de la tasa de los desplazamientos.

c) Considerando la expresión (3.4-14), podemos compararla con (3.4-22) y se obtiene la expresión:

$$\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T\mathbf{D}\mathbf{R} = \frac{1}{2}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right)\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right) \qquad (3.4\text{-}25)$$

la que, al igual que **D**, sólo presenta valores no nulos cuando existe una variación en las elongaciones, es decir $\dot{\mathbf{U}} \neq \mathbf{0}$, o en otras palabras, $\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$ ante variaciones como cuerpo rígido del movimiento.

d) Considerando las expresiones (3.4-16) y (3.4-25) se obtiene:

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}\right) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.4\text{-}26)$$

En la anterior queda claramente establecido que la <u>tasa de deformación corrotada equivale a la tasa de deformación logarítmica</u>.

## 3.5 MEDIDAS DE TENSIONES.

En la mecánica no lineal de los medios continuos se utilizan normalmente varios medidas de tensiones además del clásico tensor de Cauchy, "$\boldsymbol{\sigma}$". Brevemente, mencionaremos algunos de ellos y especialmente los usados en esta tesis:

**Primer tensor de Piola-Kirchhoff P**:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{F}^{-T} \qquad (3.5\text{-}1)$$

**Segundo tensor de Piola-Kirchhoff S:**

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{F}^{-T} \qquad (3.5\text{-}2)$$

Detalles de estos, se pueden ver en [50], entre otros autores.

Otras medidas de tensiones pueden definirse también a partir del principio de conservación de energía[9,61]. Estableciendo la igualdad de la potencia mecánica (o tasa de energía) específica en la configuración inicial o sin deformación, $\rho_0 \dot{w}$, se puede escribir:

$$\rho_0 \dot{w} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}} \qquad (3.5\text{-}3)$$

y en base a las definiciones de las medidas de deformaciones, dadas en la sección 3.4, se puede despejar las relaciones entre las distintas medidas de tensiones

**Tensor de tensiones de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}.\mathbf{F}^T = \mathbf{F}.\mathbf{S}.\mathbf{F}^T \qquad (3.5\text{-}4)$$

**Tensor co-rotado de la tensión de Kirchhoff** (o simplemente tensión co-rotacional de Kirchhoff):

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T.\boldsymbol{\tau}.\mathbf{R} = J\mathbf{R}^T.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{R} = \mathbf{U}.\mathbf{P}.\mathbf{R} = \mathbf{U}.\mathbf{S}.\mathbf{U} \qquad (3.5\text{-}5)$$

**Tensor tasa de Jaumann de la tensión de Cauchy**:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathrm{J}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T \qquad (3.5\text{-}6)$$

**Tensor tasa de Jaumann del tensor de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla \mathrm{J}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^T \qquad (3.5\text{-}7)$$

**Tensor tasa de Truesdell de la tensión de Cauchy:**

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \mathrm{traza}(\mathbf{L})\boldsymbol{\sigma} \qquad (3.5\text{-}8)$$

**Tensor derivada de Lie de la tensión de Kirchhoff:**

$$L_v\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}.\dot{\mathbf{S}}.\mathbf{F}^T = \mathbf{F}.\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{F}^{-1}.\boldsymbol{\tau}.\mathbf{F}^{-T}\right).\mathbf{F}^T = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L} \qquad (3.5\text{-}9)$$

**Tensor tasa de Green-Naghdi de la tensión de Cauchy:**

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla \mathrm{G}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega}^T \qquad (3.5\text{-}10)$$

**Tensor tasa de Green-Naghdi de la tensión de Kirchhoff:**

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla \mathrm{G}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^T \qquad (3.5\text{-}11)$$

## 3.6 MOVIMIENTOS SUPERPUESTOS DE CUERPO RÍGIDO. OBJETIVIDAD.

Considérese un movimiento de cuerpo rígido superpuesto a la deformación $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{S} \subset \mathrm{R}^3$. La posición $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ de cada partícula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ cambia a:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t).\mathbf{x} \in \mathrm{R}^3 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} = \varphi(\mathcal{B}) \qquad (3.6\text{-}1)$$

donde $\mathbf{c}(t)$ es una función sólo del tiempo que representa un desplazamiento, y $\mathbf{Q}(t)$ es una matriz ortogonal, función sólo del tiempo, que representa una rotación. El movimiento es llamado rígido porque se preserva la distancia entre dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}$, o sea que:

$$\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+ = \mathbf{Q}(t).(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \;\Rightarrow\; \left\|\mathbf{x}_1^+ - \mathbf{x}_2^+\right\|^2 = \left\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right\|^2 \tag{3.6-2}$$

donde $\left\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right\|^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T.(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ es el cuadrado de la distancia Euclidiana.

El gradiente de deformación, ante un movimiento de este tipo, se transforma en:

$$\mathbf{F}^+ = \frac{\partial \mathbf{x}^+}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t)\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Q}(t).\mathbf{F} \tag{3.6-3}$$

Un tensor espacial se dice objetivo cuando ante un movimiento como cuerpo rígido se transforma según las reglas de transformación de tensores, es decir, para tensores de segundo orden, según el doble producto de matrices de rotación:

$$(\bullet)^+ = \mathbf{Q}(t).(\bullet).\mathbf{Q}(t)^T \tag{3.6-4}$$

donde $(\bullet)$ es un tensor objetivo de segundo orden.

El gradiente espacial de velocidad, teniendo en cuenta (3.4-10) y (3.6-3), resulta:

$$\mathbf{L}^+ = \dot{\mathbf{F}}^+.(\mathbf{F}^+)^{-1} = \mathbf{Q}.\mathbf{L}.\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-5}$$

el cual no se transforma objetivamente debido al término adicional antisimétrico $\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T$. Sin embargo, de acuerdo a (3.4-12) y (3.6-5), la velocidad de deformación se transforma objetivamente:

$$\mathbf{D}^+ = \mathbf{Q}.\mathbf{D}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-6}$$

Mientras que, de acuerdo a la (3.4-13), el tensor rotación resulta no objetivo:

$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{Q}.\mathbf{W}.\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-7}$$

Los tensores materiales, que son tensores definidos en la configuración de referencia, permanecen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido. Así, por ejemplo, de (3.4-8) y (3.6-3):

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{F}^+)^T.\mathbf{F}^+ - \mathbf{I}^+\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \equiv \mathbf{E} \tag{3.6-8}$$

Lo mismo sucede con **U**, de (3.4-5) y (3.6-3):

$$\mathbf{U}^+ = \left[(\mathbf{F}^+)^T.\mathbf{F}^+\right]^{1/2} = \left(\mathbf{F}^T.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{F}\right)^{1/2} = \left(\mathbf{F}^T.\mathbf{F}\right)^{1/2} \equiv \mathbf{U} \tag{3.6-9}$$

El tensor rotación queda:

$$\mathbf{R}^+ = \mathbf{F}^+.(\mathbf{U}^+)^{-1} = \mathbf{Q}.\mathbf{F}.\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{Q}.\mathbf{R} \tag{3.6-10}$$

y también, de (3.4-21):

$$\mathbf{\Omega}^+ = \dot{\mathbf{R}}^+.(\mathbf{R}^+)^T = \mathbf{Q}.\mathbf{\Omega}.\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-11}$$

El tensor de tensiones de Cauchy es objetivo, es decir que cumple:

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-12}$$

pero su tasa, que viene dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{Q}.\dot{\boldsymbol{\sigma}}.\mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T).\boldsymbol{\sigma}^+ - \boldsymbol{\sigma}^+.(\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T) \tag{3.6-13}$$

resulta claramente no objetiva debido a los últimos dos términos.

Análogamente, el tensor de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ es objetivo, es decir:

$$\boldsymbol{\tau}^+ = J\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}.\boldsymbol{\tau}.\mathbf{Q}^T \tag{3.6-14}$$

sin embargo, su tasa es no objetiva:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^+ = \mathbf{Q}.\dot{\boldsymbol{\tau}}.\mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T).\boldsymbol{\tau}^+ - \boldsymbol{\tau}^+.(\dot{\mathbf{Q}}.\mathbf{Q}^T) \tag{3.6-15}$$

Al igual que los tensores materiales, los tensores espaciales definidos en configuración corrotada, como por ejemplo (3.4-14) y (3.5-5), se mantienen inalterados ante movimientos espaciales superpuestos de cuerpo rígido:

$$\overline{\mathbf{D}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T.\mathbf{D}^+.\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{D}.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{R} \equiv \overline{\mathbf{D}} \tag{3.6-16}$$

y

$$\overline{\boldsymbol{\tau}}^+ = (\mathbf{R}^+)^T.\boldsymbol{\tau}^+.\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}^T.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\boldsymbol{\tau}.\mathbf{Q}^T.\mathbf{Q}.\mathbf{R} \equiv \overline{\boldsymbol{\tau}} \tag{3.6-17}$$

Por supuesto, los escalares tampoco se ven afectados por estos movimientos de cuerpo rígido. Por ejemplo, de (3.4-6) y (3.6-3), y teniendo en cuenta que el determinante de cualquier matriz de rotación es igual a la unidad, se obtiene:

$$J^+ = \det(\mathbf{F}^+) = \det(\mathbf{Q}).\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}) \equiv J \tag{3.6-18}$$

Otros tensores, como los (3.5-6) a (3.5-11), son también objetivos pero no se demuestran.

## 3.7 INFLUENCIA DE LA OBJETIVIDAD EN LAS ECUACIONES CONSTITUTIVAS.

En las soluciones incrementales (mas adelante se darán detalles) las ecuaciones constitutivas relacionan tasas de tensiones con tasas de deformaciones específicas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{D}\text{, ó }\ \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \tag{3.7-1}$$

Pero la anterior no es una ecuación válida a ser utilizada cuando se producen rotaciones de cuerpo rígido como se muestra en Belytschko et al[9].

Las rotaciones como cuerpo rígido son tenidas en cuenta por las tasas objetivas de los tensores de tensiones. El tensor de Jaumann (3.5-6), por ejemplo, es una medida objetiva y presenta una ecuación constitutiva en tasa de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}\text{, ó }\ \sigma_{ij}^{\nabla J} = C_{ijkl}^{\sigma J} D_{kl} \tag{3.7-2}$$

donde $\mathbf{C}^{\sigma J}$ es el tensor constitutivo de cuarto orden, que contiene las características del material, correspondiente a esta medida de tensiones. Por lo tanto, la forma correcta de la ecuación (3.7-1), para el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy, es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\nabla J} + \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T = \underbrace{\mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D}}_{\text{material}} + \underbrace{\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T}_{\text{rotación}} \tag{3.7-3}$$

Se aprecia que el cálculo de la tasa del tensor de Cauchy está compuesto de dos partes: la respuesta objetiva del material, debido a deformaciones específicas, y el cambio de las tensiones debido a las rotaciones de cuerpo rígido.

Cualquiera de los tensores tasas objetivas anteriores puede ser utilizado para calcular $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$; en consecuencia, para que el resultado no varíe, los tensores constitutivos $\mathbf{C}$ deben definir según la tasa objetiva elegida. Por lo tanto, se les agrega superíndices para especificar la tasa objetiva a la que está asociada.

Por último, también se pueden definir la ecuación constitutiva en términos de magnitud corrotada, especialmente usada en esta tesis:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}} \tag{3.7-4}$$

Una ecuación como la (3.7-4), es insensible a cualquier movimiento espacial superpuesto de cuerpo rígido. En (3.6-16) se demostró que $\overline{\mathbf{D}}^{+} = \overline{\mathbf{D}}$, en tanto, la tasa de la tensión corrotada de Kirchhoff, partiendo de (3.5-5), realizando la derivada en forma semejante de como se hizo en (3.6-13) en términos de $\mathbf{R}$ y conformando los productos para poder usar (3.4-21), resulta:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T.(\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}.\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\Omega}).\mathbf{R} \tag{3.7-5}$$

Además, observando la (3.7-5) y la (3.5-11) vemos que la tasa de tensión corrotada de Kirchhoff equivale al tensor tasa de Green Naghdi de Kirchhoff corrotada:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T.\boldsymbol{\tau}^{\nabla G}.\mathbf{R} \tag{3.7-6}$$

Luego, a partir de que (3.5-11) es objetiva y usando (3.6-10), se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{+} = \dot{\boldsymbol{\tau}} \tag{3.7-7}$$

De esta forma, como $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ también es insensible a rotaciones de cuerpo rígido, lo será la relación (3.7-4).

## 3.8 FORMA DÉBIL DE LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EXPRESADA EN TASAS.

La descripción Lagrangiana de la ecuación de movimiento, o ecuación de conservación de momento, está dada por[9] :

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \widetilde{\mathbf{B}} = \rho_0 \mathbf{A}\text{, ó } \frac{\partial P_{ij}}{\partial X_j} + \rho_0 \widetilde{B}_i = \rho_0 \frac{\partial V_i(\mathbf{X},t)}{\partial t} \qquad \text{en } B \tag{3.8-1}$$

donde $\rho_0$ es la densidad de masa en la configuración de referencia $B$, $\mathbf{P}$ es la primer tensión de Piola-Kirchhoff, $\widetilde{\mathbf{B}}$ son las fuerzas de masa, $\mathbf{A}$ las fuerzas de inercia y $\mathbf{V}$ velocidad en coordenadas materiales. Además, las fuerzas de superficie vienen dadas por:

$$\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{P}.\mathbf{n}_0 \big|_{\partial_t B} \tag{3.8-2}$$

donde $\bar{\mathbf{t}}_0$ es la fuerza por unidad de área prescripta en una porción $\partial_t B$ del contorno $\partial B$.

En problemas estáticos las aceleraciones (o fuerzas de inercia) son despreciadas, obteniéndose la ecuación de equilibrio:

$$\text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \qquad \text{en } B \tag{3.8-3}$$

La forma en tasas de esta ecuación, necesaria en las soluciones incrementales, se calcula asumiendo que las cargas de masa $\widetilde{\mathbf{B}}$ y las de superficie $\bar{\mathbf{t}}_0$ son configuracionalmente independientes, es decir, no dependen de la deformación $\varphi$. Entonces, la ecuación de equilibrio en tasas se escribe como:

$$\text{DIV } {}^t\dot{\mathbf{P}} + \rho_0 \dot{\widetilde{\mathbf{B}}} = \mathbf{0} \qquad \text{en } B \tag{3.8-4}$$

que es una expresión válida para un incremento de carga dado por $\dot{\widetilde{\mathbf{B}}}$ y $\dot{\bar{\mathbf{t}}}_0$ en un cierto tiempo fijo $t$.

La deducción de la forma débil de (3.8-4) puede verse en las referencias [9], [53] y [61] con ligeros cambios entre versiones, llegándose a:

$$\int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{L} : \left[{}^t\mathbf{L}.{}^t\boldsymbol{\tau} + {}^tL_v\boldsymbol{\tau}\right]\frac{d\varphi(B)}{J} = \int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v}.\dot{\mathbf{b}}.\rho.d\varphi(B) + \int_{\partial^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v}.\dot{\bar{\mathbf{t}}}.d\partial\varphi(B) \tag{3.8-5}$$

De acuerdo a referencia [61] se puede sustituir ${}^t\boldsymbol{\eta}$ por ${}^t\mathbf{v}$, y ${}^t\nabla\boldsymbol{\eta}$ por ${}^t\mathbf{L}={}^t\nabla\mathbf{v}$ (la velocidad espacial, en un tiempo fijo *t*, es una variación admisible ${}^t\mathbf{v}\in V_{{}^t\varphi}$). En el apartado siguiente (3.9), se verá que la relación constitutiva para el tensor derivada de Lie viene dada por: $L_v\boldsymbol{\tau}=\mathbf{C}^{\tau}:\mathbf{D}$, entonces, la (3.8-5) queda expresada:

$$\int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{L}:\left[{}^t\mathbf{L}.{}^t\boldsymbol{\tau}+{}^t\mathbf{C}^{\tau}:{}^t\mathbf{D}\right]\frac{d\varphi(B)}{J}=\int_{{}^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v}.\dot{\mathbf{b}}.\rho.d\varphi(B)+\int_{\partial^t\varphi(B)} {}^t\delta\mathbf{v}.\dot{\mathbf{t}}.d\partial\varphi(B) \qquad (3.8\text{-}6)$$

Esta es la forma débil de la ecuación de equilibrio expresada en tasas, que permite calcular, en un cierto tiempo *t*, la velocidad espacial actual ${}^t\mathbf{v}$, para una cierta carga, dada por el miembro derecho de (3.8-6), sobre una cierta configuración ${}^t\varphi$ en la que se halla en equilibrio un cierto campo de tensiones ${}^t\boldsymbol{\tau}$. En la anterior, $\dot{\mathbf{b}}(\mathbf{x})=\dot{\tilde{\mathbf{B}}}(\mathbf{X})$ es la tasa de la fuerza de masa y $\dot{\mathbf{t}}.d\partial\varphi(B)=\dot{\mathbf{t}}_0.d\partial B$ la tasa de fuerzas de superficie.

## 3.9 ECUACIONES CONSTITUTIVAS HIPER E HIPOELÁSTICAS.

La relación constitutiva de un material también puede ser expresada, a diferencia del capítulo previo, en términos de tasa de magnitudes espaciales:

$$\dot{\mathbf{S}}=\mathbf{C}^{\mathrm{SE}}:\dot{\mathbf{E}},\ \text{ó}\ \ \dot{S}_{ij}=C^{\mathrm{SE}}_{ijkl}\dot{E}_{kl} \qquad (3.9\text{-}1)$$

aquí $\mathbf{C}^{\mathrm{SE}}$ es llamado tensor constitutivo tangente[9]. Estos tensores se deducen de una función energía de deformación almacenada[61]. Como se asume que esta matriz es definida positiva y los tensores involucrados en la relación anterior son simétricos, $\mathbf{C}^{\mathrm{SE}}$ presenta simetría mayor:

$$C^{\mathrm{SE}}_{ijkl}=C^{\mathrm{SE}}_{klij} \qquad (3.9\text{-}2)$$

y simetría menor:

$$C^{\mathrm{SE}}_{ijkl}=C^{\mathrm{SE}}_{jikl}=C^{\mathrm{SE}}_{ijlk} \qquad (3.9\text{-}3)$$

La (3.9-1) es una ecuación constitutiva **hiperelástica** en términos de tasas de magnitudes materiales, pero también puede escribirse en términos de tasas de magnitudes espaciales. Por ejemplo, recordando la primer igualdad de (3.5-9) y teniendo en cuenta la última de (3.4-24), en notación indicial, se deduce que:

$$L_v\tau_{ij}=F_{im}(C^{\mathrm{SE}}_{mnpq}\dot{E}_{pq})F_{jn}=F_{im}(C^{\mathrm{SE}}_{mnpq}F_{kp}D_{kl}F_{lq})F_{jn}$$

$$= F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C^{\mathrm{SE}}_{mnpq} D_{kl} = C^{\tau}_{ijkl} D_{kl} \tag{3.9-4}$$

de donde:

$$C^{\tau}_{ijkl} = F_{im} F_{jn} F_{kp} F_{lq} C^{\mathrm{SE}}_{mnpq} \tag{3.9-5}$$

Por lo tanto, la correspondiente ecuación constitutiva hiperelástica espacial en tasas es:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D} \tag{3.9-6}$$

Una importante consideración a realizar es que, a partir de relaciones hiperelásticas invariantes de la forma (3.9-1), se pueden deducir ecuaciones constitutivas espaciales en tasas, también invariantes, de la forma (3.9-6). Pero la inversa no se cumple, es decir, a partir de cualquier ecuación en tasas de la forma (3.9-6) (cualquier tensor constitutivo **C)**, no siempre es posible obtener un funcional de energía almacenada $w$ tal que las tensiones sean calculadas con (3.9-1). Para ampliar el comentario, ver el capítu1o 7 de la referencia [61].

Las ecuaciones constitutivas en tasas de la forma (3.9-6) que no derivan de un funcional de energía almacenada se denominan relaciones **hipoelásticas**. En forma genérica, las relaciones hipoelásticas, se expresan como:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\sigma\nabla} : \mathbf{D}\text{, ó }\ \boldsymbol{\tau}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D} \tag{3.9-7}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ y $\boldsymbol{\tau}^{\nabla}$ son cualquiera de las tasas objetivas de la tensión de Cauchy y Kirchhoff, respectivamente, y, $\mathbf{C}^{\sigma\nabla}$ y $\mathbf{C}^{\tau\nabla}$ son sus correspondientes tensores constitutivos. En hipoelasticidad es común considerar que alguno de estos **C** es igual al tensor constitutivo constante obtenido de la teoría de elasticidad infinitesimal, en consecuencia, ese **C** poseerá simetría mayor de acuerdo con (3.9-2) y como la tasa de deformación **D** y las tasas objetivas de tensiones son simétricas, **C** también posee simetría menor como es indicado en (3.9-3).

Según el párrafo previo, expresiones análogas a (3.9-6) pueden ser obtenidas para **cualquiera** de los tensores tasas objetivas deduciéndolas partiendo de (3.9-6), considerando las relaciones entre dichos tensores ((3.5-6) a (3.5-11)) y recordando que para todos ellos, la deformación conjugada es $\mathbf{D}$. Obviamente cada expresión se completará por un tensor constitutivo ad-hoc diferente según la tasa de tensión elegida. Particularmente, son dos las relaciones que especialmente interesan para este trabajo: la (3.9-6), y la (3.7-4). La primera porque surge naturalmente de la forma débil de ecuación de equilibrio (3.8-5), y la segunda por ser una forma objetiva de la relación constitutiva (sección 3.7). Este último punto, junto con la preservación de la simetría del sistema de ecuaciones generado por aplicación de elementos finitos, son puntos de fundamental importancia en el modelado del comportamiento de materiales basados en relaciones constitutivas hipoelásticas.

Una relación del tipo (3.9-7) es incrementalmente lineal y reversible, esto significa que para pequeños incrementos de deformación sobre un cuerpo finito deformado, los incrementos de tensiones y deformaciones están linealmente relacionados y son recuperados en la descarga. Sin embargo, para grandes deformaciones, la energía no es necesariamente conservada y el trabajo realizado en un ciclo cerrado de deformación no es necesariamente igual a cero.
A pesar de esto, existen algunas cuestiones que hacen conveniente recurrir a relaciones hipoelásticas. Entre estas razones, quizás la de mayor peso es la facilidad con que se puede representar problemas de plasticidad, como se vera en la sección 3.13. Ahora bien, ¿Qué ocurre con el problema de la energía no conservada? Algunos trabajos, por ejemplo, la referencia [20], indican en que condiciones especiales este problema no traerá mayores consecuencias. Sin entrar en detalles y muy brevemente, en el próximo punto se darán indicios de esas condiciones.

## 3.10 MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.

Las descripciones hipoelásticas de la respuesta del material son muy cómodas cuando se desea modelar en conjunto plasticidad y no linealidad geométrica. Sin embargo, como se viera en la sección 3.9, la energía no es conservada en un ciclo cerrado de deformación elástica para materiales hipoelásticos, pero si las **deformaciones elásticas son pequeñas** el error en la energía es muy pequeño, es decir, el trabajo remanente de un ciclo cerrado de deformación no es significativo.

Hacia el final de la sección 3.9 se señaló que en la elección de la ecuación constitutiva hipoelástica, que gobernará la respuesta del material, se tienen en cuenta distintos requerimientos. Uno de estos requerimientos es la independencia de las constantes del material respecto del sistema coordenado cartesiano adoptado como referencia. Considerando una relación como la (3.9-7), $\boldsymbol{\tau}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D}$, la indiferencia referencial del material requiere que:

$$\boldsymbol{\tau}^{\nabla+} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D}^{+} \qquad (3.10\text{-}1)$$

Recordando la transformación objetiva de los tensores de segundo orden (3.6-4), se puede escribir:

$$\mathbf{Q}.\boldsymbol{\tau}^{\nabla}.\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{Q}.\mathbf{D}.\mathbf{Q}^{T} \text{, ó} \quad Q_{im}Q_{jn}\tau^{\nabla}_{mn} = C^{\tau\nabla}_{ijkl}Q_{kp}Q_{lq}D_{pq} \qquad (3.10\text{-}2)$$

y reordenando se tiene:

$$\tau^{\nabla}_{mn} = (Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}C^{\tau\nabla}_{ijkl})D_{pq} \tag{3.10-3}$$

Pero la relación constitutiva es $\boldsymbol{\tau}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\tau\nabla} : \mathbf{D}$, por lo tanto debe cumplirse:

$$C^{\tau\nabla}_{mnpq} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}C^{\tau\nabla}_{ijkl} \;,\quad \forall Q_{ij} \tag{3.10-4}$$

condición que se satisface sólo para un material isotrópico. Para eliminar esta restricción, se elige la relación constitutiva (3.7-4), $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}}$, en términos de los tensores tasa de la tensión co-rotada de Kirchhoff y tasa de deformación co-rotada, insensibles a rotaciones de cuerpo rígido, es decir, $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{+} \equiv \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ y $\overline{\mathbf{D}}^{+} \equiv \overline{\mathbf{D}}$. En consecuencia:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^{+} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}}^{+} \;\equiv\; \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}} \tag{3.10-5}$$

cumpliéndose la condición (3.10-1) para toda rotación rígida, no imponiendo restricciones a este tensor constitutivo, esto es, $\overline{\mathbf{C}}^{\tau}$ puede ser no isotrópico.

Por otro lado, cuando se integra la tasa **D** en forma objetiva y se toma en el centro del intervalo, se puede asemejar al tensor de pequeñas deformaciones[61]. Como $\overline{\mathbf{D}}$ es estrictamente **D** en ejes que rotan con el punto[9], vale la misma consideración. Así, cuando el material es isotrópico y teniendo en cuenta intervalos de carga pequeños, resulta:

$$\overline{C}^{\tau}_{ijkl} = m(\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})) \tag{3.10-6}$$

siendo $\delta_{ij}$ el delta de Kronecker, y:

$$\mu = E/2(1+\nu),\ \text{y}\quad \lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu) \tag{3.10-7}$$

las constantes de Lamé en función del módulo Young $E$ y del coeficiente de Poisson $\nu$, mientras que $m$ es una constante que debe tener en cuenta el tensor de tensiones usado en la configuración co-rotada.

Otro de los requerimientos a tener en cuenta en la elección de la ecuación constitutiva hipoelástica es la simetría de la matriz de rigidez tangente de los elementos finitos, necesaria para acelerar la solución del sistema de ecuaciones que resulte de aplicar elementos finitos y reducir la demanda de almacenamiento en memoria en el cálculo computacional. La matriz ${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$ es simétrica por ser simétrico el tensor de Cauchy y el tensor constitutivo $C^{\tau}_{ijkl}$ posee simetría mayor. Recordando (3.7-5), (3.5-9), (3.9-6) y (3.4-11), se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}} &= \mathbf{R}^{T}(\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{T})\mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^{T}\left[\dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^{T} + (\mathbf{W}-\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W}-\boldsymbol{\Omega})^{T}\right]\mathbf{R}\end{aligned}$$

$$= \mathbf{R}^T \left[ L_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} + (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \right] \mathbf{R}$$

$$= \mathbf{R}^T \left[ (\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D} \right] \mathbf{R} \qquad (3.10\text{-}8)$$

donde:

$$\mathbf{C}' : \mathbf{D} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{D} \quad \text{ó} \quad C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} + \delta_{jl}\tau_{ik}) \qquad (3.10\text{-}9)$$

y

$$\mathbf{C}'' : \mathbf{D} = (\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})^T \qquad (3.10\text{-}10)$$

Recordando la (3.4-14) y realizando operaciones sobre (3.10-8), se tiene:

$$\mathbf{R}(\overline{\mathbf{C}}^\tau : \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R})\mathbf{R}^T = (\mathbf{C}^\tau + \mathbf{C}' + \mathbf{C}'') : \mathbf{D} \qquad (3.10\text{-}11)$$

o en notación indicial:

$$R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \overline{C}^\tau_{mnpq} D_{kl} = (C^\tau_{ijkl} + C'_{ijkl} + C''_{ijkl}) D_{kl} \qquad (3.10\text{-}12)$$

de donde se despeja:

$$\mathbf{C}^\tau = \mathbf{R}\mathbf{R}\overline{\mathbf{C}}^\tau \mathbf{R}^T \mathbf{R}^T - \mathbf{C}' - \mathbf{C}'', \text{ ó } C^\tau_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} \overline{C}^\tau_{mnpq} - C'_{ijkl} - C''_{ijkl} \qquad (3.10\text{-}13)$$

Los tensores $\overline{\mathbf{C}}^\tau$ y $\mathbf{C}'$ poseen simetría menor y mayor, pero el tensor $\mathbf{C}''$ no posee simetría mayor (detalles en Capítulo 7 de referencia [61]) tornando no simétrico al tensor $\mathbf{C}^\tau$, en consecuencia, la matriz de rigidez material que involucre la relación constitutiva (3.9-6) resulta no simétrica. Por lo tanto, para conservar la simetría de la matriz de rigidez tangente debería eliminarse el tensor $\mathbf{C}''$, es decir, se debería considerar que $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}$, resultando, a partir de la primer igualdad de (3.10-8), que:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau}^{\nabla J} \mathbf{R} \qquad (3.10\text{-}14)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^{\nabla J}$ es la tasa de Jaumann de la tensión de Kirchhoff definida en (3.5-7). La suposición simplificativa de considerar $\mathbf{C}'' \cong \mathbf{0}$ aparentemente no provoca errores apreciables cuando las tensiones internas del cuerpo se mantienen con valores cuyos órdenes de magnitud son menores respecto a los valores establecidos por las constantes del material, o también, cuando las tensiones de corte, definidas según el sistema cartesiano elegido como referencia, son muy reducidas respecto de las tensiones normales[61]. Este tipo de simplificaciones también aparecen cuando se trabaja con formulaciones hiperelásticas y es en ese caso donde encuentran su mejor adaptación. Pero en los casos hipoelásticos no es del todo viable, por lo que en este trabajo se presenta el formato final de la alternativa que ya fuera bosquejada en Manzolillo[53].

## 3.11 PROPUESTA PARA MODELO NO LINEAL HIPOELÁSTICO.

La tasa de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, calculada en (3.10-8), también puede ser expresada como:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \mathbf{R}^T (\dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\Omega\tau} - \boldsymbol{\tau\Omega}^T)\mathbf{R}$$
$$= \mathbf{R}^T \left[L_v \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T\right]\mathbf{R} \qquad (3.11\text{-}1)$$

Considerando además la antisimetría de $\boldsymbol{\Omega}$, se puede escribir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\right) = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T\right] \qquad (3.11\text{-}2)$$

Reemplazando esta expresión en las relaciones constitutivas: $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \bar{\mathbf{D}}$ y $L_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\tau} : \mathbf{D}$ sustituyendo ambas en (3.11-1) y sumando algebraicamente los términos que daban origen a "$\mathbf{C}' : \mathbf{D}$" y "$\mathbf{C}'' : \mathbf{D}$", para crear ahora a "$\mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})$", se tiene:

$$\bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \mathbf{R}^T \frac{1}{2}\left[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T\right]\mathbf{R} =$$
$$= \mathbf{R}^T \left\{\mathbf{C}^{\tau} : \frac{1}{2}\left[(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T\right] + \mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\right\}\mathbf{R} \qquad (3.11\text{-}3)$$

donde:

$$\mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})^T \text{, ó } C'''_{ijkl} = \delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} \qquad (3.11\text{-}4)$$

La expresión (3.11-3) puede modificarse de modo de que en ambos miembros quede cada tensor constitutivo multiplicado por la deformación "$(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})$"

Para ello tengamos presente que $\bar{\mathbf{C}}^{\tau}$ posee simetría menor y puede ser escrito:

$$\bar{C}^{\tau}_{mnpq} = \frac{1}{2}(\bar{C}^{\tau}_{mnpq} + \bar{C}^{\tau}_{mnqp}) \qquad (3.11\text{-}5)$$

Como $\mathbf{C}^{\tau}$ a priori no nos asegura nada, introducimos, en notación indicial, un tensor:

$$\hat{C}^{\tau}_{ijkl} = \frac{1}{2}(C^{\tau}_{ijkl} + C^{\tau}_{ijlk}) \qquad (3.11\text{-}6)$$

Este tensor, con simetría menor: "$\hat{C}^{\tau}_{ijkl} = \hat{C}^{\tau}_{ijlk}$", puede ser utilizado en lugar de $C^{\tau}_{ijkl}$ para el modelo de elementos finitos, puesto que es conjugado de la velocidad de deformación $D_{kl}$ (ver (3.9-6)),es simétrica, lo que no alterará el producto, y no introduce error.

Al introducir (3.11-5) y (3.11-6) en (3.11-3), se puede resolver las semisumas que resultan y obtener la expresión:

$$\bar{\mathbf{C}}^{\tau} : \mathbf{R}^T (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \left\{\hat{\mathbf{C}}^{\tau}(\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega}) + \mathbf{C}''' : (\mathbf{L} - \boldsymbol{\Omega})\right\}\mathbf{R} \qquad (3.11\text{-}7)$$

que en notación indicial, resulta,

$$C^{\tau}_{ijkl} \cong \hat{C}^{\tau}_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(C^{\tau}_{ijkl} + C^{\tau}_{ijlk}\right) = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\overline{C}^{\tau}_{mnpq} - C'''_{ijkl} \qquad (3.11\text{-}8)$$

El tensor $\overline{\mathbf{C}}^{\tau}$, como generalmente se hace en los modelos hipoelásticos, es asumido con simetría mayor. Sin embargo, el tensor $\mathbf{C}'''$ no posee simetría mayor: $C'''_{ijkl} \neq C'''_{klij}$, tornando no simétrico a $\hat{\mathbf{C}}^{\tau}$ y consecuentemente a la matriz de rigidez del sistema de elementos finitos. Separando $\mathbf{C}'''$ en una parte simétrica $\mathbf{C}^{\text{sim}} \equiv \mathbf{C}'$ y otra asimétrica $\mathbf{C}^{\text{asim}}$, se obtiene:

$$C'''_{ijkl} = C^{\text{sim}}_{ijkl} + C^{\text{asim}}_{ijkl} \qquad (3.11\text{-}9)$$

donde:

$$C^{\text{sim}}_{ijkl} \equiv C'_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} + \delta_{jl}\tau_{ik}),\ \ C'_{ijkl} = C'_{jikl} = C'_{ijlk} = C'_{klij} \qquad (3.11\text{-}10)$$

que posee simetría mayor y menor, y:

$$C^{\text{asim}}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\tau_{jl} - \delta_{il}\tau_{jk} + \delta_{jk}\tau_{il} - \delta_{jl}\tau_{ik}),\ \ C^{\text{asim}}_{ijkl} = C^{\text{asim}}_{jikl} = -C^{\text{asim}}_{ijlk} \text{ y } C^{\text{asim}}_{ijkl} \neq C^{\text{asim}}_{klij} \qquad (3.11\text{-}11)$$

que no posee simetría mayor.

Como se desprende de las expresiones (3.11-6), (3.11-9) y (3.11-11), para mantener la simetría mayor de $\mathbf{C}^{\tau}$ (y de la matriz de rigidez de los elementos finitos), se puede eliminar el término $\mathbf{C}^{\text{asim}}$, en general, cuando las tensiones internas $\tau_{ij}$ del cuerpo son de un orden de magnitud menor respecto a las constantes del material, es decir: $\mathbf{C}^{\text{asim}} << \overline{\mathbf{C}}^{\tau}$, y en particular cuando las tensiones tangenciales $\tau_{ij}$ (con $i \neq j$) y $\frac{1}{2}(\tau_{ii} - \tau_{jj})$ son de valor despreciable, resultando: $\mathbf{C}^{\text{asim}} \cong \mathbf{0}$. Por lo tanto, en estos casos se podrá calcular $\mathbf{C}^{\tau}$ de (3.8-5) , sin generar errores significativos, utilizando la expresión:

$$C^{\tau}_{ijkl} \cong \hat{C}^{\tau}_{ijkl} = R_{im}R_{jn}R_{kp}R_{lq}\overline{C}^{\tau}_{mnpq} - C'_{ijkl} \qquad (3.11\text{-}12)$$

Por supuesto, en los demás casos, en que $\mathbf{C}^{\text{asim}}$ posea un valor no despreciable, el tensor $\mathbf{C}^{\tau}$ se tiene que calcular con (3.10-13) o (3.11-6), debiendo resolverse necesariamente sistemas no simétricos de ecuaciones de elementos finitos.

## 3.12 ELASTOPLASTICIDAD.

Los materiales que desarrollan deformaciones totalmente recuperables (deformaciones elásticas) sólo hasta un cierto nivel de tensiones o límite elástico, y deformaciones irrecuperables (deformaciones plásticas) más allá de este límite, se denominan materiales elastoplásticos. Estos materiales también son clasificados como independientes de la tasa (o independientes del tiempo) porque la respuesta del material no depende de la tasa de deformación, es decir, de la velocidad con que se aplica la carga, contrastando con los materiales viscoelastoplásticos[69], típicamente dependientes de la tasa (o del tiempo), que no serán tratados en este trabajo.

En el campo plástico los materiales elastoplásticos presentan un comportamiento disipativo y dependiente de la trayectoria, esto es, parte de la energía de deformación es irreversiblemente transformada a otras formas de energía, como calor, generándose deformaciones plásticas irreversibles cuya magnitud habrá que conocer antes de calcular las tensiones. En consecuencia, al depender las tensiones de la historia completa de la deformación, no pueden calcularse con una simple función de la deformación actual. En estos casos sólo pueden establecerse relaciones entre tasas de tensiones y de deformaciones, adoptándose, como fuera señalado en las secciones 3.2 y 3.3, procesos incrementales de solución con formulaciones lagrangianas.

La inclusión del análisis de la no linealidad geométrica permite la representación de los grandes desplazamientos, rotaciones y elongaciones que sufre el material a lo largo del proceso de carga, pero requiere del uso de magnitudes y relaciones constitutivas objetivas, de acuerdo a lo visto en la sección 3.7. Además, estas leyes constitutivas pueden ser hiperelásticas o hipoelásticas, según deriven o no de un funcional de energía almacenada (ver sección 3.9). En consecuencia, los modelos de plasticidad se denominan hiperelastoplásticos o hipoelastoplásticos, según la respuesta del material en el campo elástico siga una ley hiperelástica o hipoelástica, respectivamente. En ambos casos, la formulación del campo plástico se desarrolla de manera análoga a la plasticidad infinitesimal (o de pequeñas deformaciones), es decir, se utiliza la teoría clásica de plasticidad[73] pero debe reiterarse que en el caso de hiperelastoplasticidad, la extensión de modelos lineales (plasticidad infinitesimal) no es tan directa (ver capítulo 7 de Simo & Hughes[61]). A modo de recordatorio, se mencionará los principales elementos de la teoría clásica de plasticidad:

a) Descomposición de la deformación, en una parte reversible elástica y otra irreversible plástica, que define la relación incremental tensión – deformación elastoplásticas.
b) Una superficie de fluencia que determina el límite elástico, a partir del cual se producen las deformaciones plásticas.
c) Un criterio de carga que define cuando existe carga en el sentido de la plasticidad.
d) Una regla de flujo (o de fluencia) que gobierna el flujo plástico, es decir, determina el vector de deformaciones plásticas.
e) Una regla de endurecimiento que gobierna las variables internas que definen la evolución de la superficie de fluencia.

## 3.13 TEORÍA DE PLASTICIDAD EN TÉRMINOS DE TENSIONES CO-ROTADAS.

La formulación de plasticidad en forma hipoelástica basada en configuraciones rotadas de la forma (3.7-4) agrega a las ventajas mencionadas anteriormente un punto fundamental: la posibilidad de no quedar restringidos a isotropía.

En los modelos hipoelastoplásticos, el tensor velocidad de deformación es típicamente descompuesto aditivamente en partes elástica y plástica, opción válida si las deformaciones elásticas son pequeñas[20]:

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{E}} + \overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{P}} \tag{3.13-1}$$

La parte elástica es la que se relaciona, a través de la ecuación constitutiva (3.10-5), con la tasa corrotada de la tensión de Kirchhoff, esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{E}} = \overline{\mathbf{C}}^{\tau} : \left(\overline{\mathbf{D}} - \overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{P}}\right) \tag{3.13-2}$$

La parte plástica queda definida por la regla de flujo plástico como:

$$\overline{\mathbf{D}}^{\mathrm{P}} = \dot{\Lambda}.\overline{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}}) \tag{3.13-3}$$

donde $\dot{\Lambda}$ es la tasa del multiplicador plástico, $\overline{\mathbf{k}}$ es el conjunto de variables internas, ligadas al endurecimiento, que gobiernan la evolución de la superficie de fluencia $\overline{F}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}})$ y $\overline{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}})$ es la dirección del flujo plástico:

$$\overline{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}}) = \frac{\partial \overline{G}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{3.13-4}$$

siendo $\overline{G}(\boldsymbol{\tau},\overline{\mathbf{k}})$ un potencial plástico que define el incremento de deformaciones plásticas. Estas deformaciones plásticas se producen sólo si las tensiones $\boldsymbol{\tau}$ satisfacen el criterio de plastificación, es decir, si alcanzan el límite elástico o superficie de fluencia $\overline{F}(\overline{\boldsymbol{\tau}},\overline{\mathbf{k}})=0$. El caso particular en que $\overline{G}\equiv\overline{F}$, es conocido como plasticidad asociada, concepto que deberá revisarse para el caso de modelos de consolidación no saturada. Por lo tanto, la (3.13-3), expresada en forma diferencial y recordando la última equivalencia de (3.4-26), resulta:

$$d\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}=d\overline{\Lambda}\frac{\partial\overline{F}(\overline{\boldsymbol{\tau}},\overline{\mathbf{k}})}{\partial\overline{\boldsymbol{\tau}}} \tag{3.13-5}$$

El resto de las ecuaciones de plasticidad, incluidas las deducciones del parámetro plástico $d\overline{\Lambda}$ y de la matriz constitutiva elastoplástica $\overline{\mathbf{C}}^{\tau}_{\mathrm{EP}}$ se desarrollan de manera totalmente análoga al caso de plasticidad infinitesimal (linealidad geométrica), pero en términos de las tensiones co-rotadas. El incremento total de la deformación logarítmica simétrica (3.4-15) resulta:

$$d\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}=d\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{E}}+d\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}=\overline{\mathbf{C}}^{\tau^{-1}}d\overline{\boldsymbol{\tau}}+d\overline{\Lambda}\frac{\partial\overline{F}(\overline{\boldsymbol{\tau}},\overline{\mathbf{k}})}{\partial\overline{\boldsymbol{\tau}}} \tag{3.13-6}$$

Se mencionó que la condición de plastificación, que determina el nivel de tensiones $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ para el cual se inician las deformaciones plásticas, puede ser escrita en forma genérica como:

$$\overline{F}(\overline{\boldsymbol{\tau}},\overline{\mathbf{k}})=0 \tag{3.13-7}$$

Sobre esta superficie de fluencia $\overline{F}=0$ se mantienen las tensiones durante un proceso de carga plástica ($d\overline{\Lambda}>0$). Esto también puede ser establecido por la condición de consistencia $d\overline{F}=0$ que, por la regla de diferenciación en cadena, puede ser escrita como:

$$d\overline{F}=\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{\boldsymbol{\tau}}}d\overline{\boldsymbol{\tau}}+\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{\mathbf{k}}}d\overline{\mathbf{k}}=\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{\boldsymbol{\tau}}}d\overline{\boldsymbol{\tau}}-\overline{A}.d\overline{\Lambda}=0 \tag{3.13-8}$$

donde el parámetro $\overline{A}$ viene dado por:

$$\overline{A}=-\frac{\partial\overline{F}}{\partial\overline{\mathbf{k}}}\frac{d\overline{\mathbf{k}}}{d\overline{\Lambda}} \tag{3.13-9}$$

Luego, a partir de (3.13-6) y (3.13-8), análogamente a la plasticidad infinitesimal, se deduce el incremento del multiplicador plástico:

$$d\overline{\Lambda}=\frac{\overline{\mathbf{a}}^{T}\overline{\mathbf{C}}^{\tau}d\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\overline{\mathbf{a}}^{T}\overline{\mathbf{C}}^{\tau}\overline{\mathbf{a}}+\overline{A}} \tag{3.13-10}$$

donde $\overline{\mathbf{a}}$ es la dirección del flujo plástico (3.13-4), representado en la plasticidad asociada por el vector normal a la superficie de fluencia:

$$\overline{\mathbf{a}}=\frac{\partial\overline{F}(\overline{\boldsymbol{\tau}},\overline{\mathbf{k}})}{\partial\overline{\boldsymbol{\tau}}} \tag{3.13-11}$$

Para los casos de endurecimiento isotrópico:

$$\bar{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}},\bar{\mathbf{k}})=\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})-\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})=0 \qquad (3.13\text{-}12)$$

donde $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ es una función escalar que determina el nivel de las tensiones $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, y $\bar{g}(\bar{\mathbf{k}})$ es el límite elástico que depende de un conjunto de variables internas $\bar{\mathbf{k}}$ del material. Resulta en estos casos:

$$\bar{\mathbf{a}}=\frac{\partial\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})}{\partial\bar{\boldsymbol{\tau}}}\text{, ó }\ \bar{\mathbf{a}}^T=\left\{\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{11}},\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{22}},\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{33}},\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{23}},\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{31}},\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{\tau}_{12}}\right\} \qquad (3.13\text{-}13)$$

La matriz constitutiva elastoplástica, definida por:

$$d\bar{\boldsymbol{\tau}}=\bar{\mathbf{C}}^{\tau}_{\mathrm{EP}}d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=\bar{\mathbf{C}}^{\tau}_{\mathrm{EP}}(d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{E}}+d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{P}}) \qquad (3.13\text{-}14)$$

puede ser deducida a partir de (3.13-6) y (3.13-10), obteniéndose en notación matricial o de Voigt:

$$\bar{\mathbf{C}}^{\tau}_{\mathrm{EP}}=\bar{\mathbf{C}}^{\tau}-\frac{\bar{\mathbf{C}}^{\tau}.\bar{\mathbf{a}}.\bar{\mathbf{a}}^T.\bar{\mathbf{C}}^{\tau}}{\bar{\mathbf{a}}^T.\bar{\mathbf{C}}^{\tau}.\bar{\mathbf{a}}+\bar{A}} \qquad (3.13\text{-}15)$$

y en notación tensorial:

$$\bar{\mathbf{C}}^{\tau}_{\mathrm{EP}}=\bar{\mathbf{C}}^{\tau}-\frac{\bar{\mathbf{C}}^{\tau}.\bar{\mathbf{a}}.\bar{\mathbf{a}}^T.\bar{\mathbf{C}}^{\tau}}{\bar{\mathbf{a}}^T.\bar{\mathbf{C}}^{\tau}.\bar{\mathbf{a}}+\bar{A}}\text{, ó }\ \bar{C}^{\tau}_{\mathrm{EP}\,ijkl}=\bar{C}^{\tau}_{ijkl}-\frac{\bar{C}^{\tau}_{ijmn}\bar{a}_{mn}\bar{a}_{pq}\bar{C}^{\tau}_{pqkl}}{\bar{a}_{rs}\bar{C}^{\tau}_{rstu}\bar{a}_{tu}+\bar{A}} \qquad (3.13\text{-}16)$$

### 3.14 PLASTICIDAD EN TENSIONES CO-ROTADAS Y LA ISOTROPÍA.

La formulación de plasticidad en forma hipoelástica basada en configuraciones rotadas de la forma (3.7-4) agrega a las ventajas mencionadas en 3.13, un punto fundamental: la posibilidad de no quedar restringidos a materiales con isotropía. La condición de respuesta isótropa establece fuertes restricciones a las formas admisibles de una función respuesta, como puede serlo la función de fluencia. Una función $f:S\rightarrow R$ (donde $R$ es el espacio de los números reales) de tensores simétricos $\mathbf{H}\in S$ es isótropo si y solo si:

$$f(\mathbf{QHQ}^T) = f(\mathbf{H}) \qquad \forall \mathbf{Q} \in SO(3) \tag{3.14-1}$$

Esta función *f* puede ser la energía de la deformación o cualquier otra función respuesta, como por ejemplo, la función de fluencia en plasticidad. Dependiendo de lo que se analice, $\mathbf{H} \in S$ puede ser el tensor derecho de Green, de Cauchy o el de tensión corrotada de Kirchhoff; solamente debe cumplir la condición de ser simétrico.

Ahora bien, si se usara el tensor de Cauchy existe una relación que no puede dejarse de lado y es la de objetividad de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}.\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{Q}^T$, dada por (3.6-12), por lo que *siempre* que se use Cauchy, se cumplirá (3.14-1) y la formulación quedará restringida a la condición de isotropía. Como las tensiones co-rotadas de Kirchhoff se mantienen invariables ante rotaciones rígidas, esto es $\bar{\boldsymbol{\tau}}^+ \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}}$ de acuerdo a (3.6-17), entonces no se imponen restricciones a la función de fluencia, es decir, la función escalar de variable tensorial satisface la condición de objetividad según (3.6-18):

$$\bar{f}^+ = \bar{f}\,, \text{ó } \; \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}^+) = \bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \tag{3.14-2}$$

sin obligación de cumplir (3.14-1), por lo que $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ puede representar un comportamiento no isotrópico en la plastificación (ver capítulo 7 de Simo & Hughes[61]).

Ahora bien, si el material modelado es isótropo, la función escalar de variable tensorial, queda representada totalmente a través de sus invariantes. Entonces, si este es el caso, $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ puede ser expresada en términos de los invariantes $\bar{I}_1$, $\bar{J}_2$ y $\bar{\theta}$ de la tensión corrotada $\bar{\boldsymbol{\tau}}$. $\bar{I}_1$ es el primer invariante del tensor de tensiones, $\bar{J}_2$ es el segundo invariante del tensor desviador y $\bar{\theta}$ una forma conveniente de expresar el tercer invariante del tensor desviador[58], que puede verse posteriormente en el apartado 4.4.

Por la regla de diferenciación en cadena, el vector de flujo plástico (3.13-11) puede ser rescrito como (ver Owen & Hinton[58]):

$$\bar{\mathbf{a}}^T = \frac{\partial \bar{f}(\bar{I}_1, \bar{J}_2, \bar{\theta})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{I}_1}\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}\frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\theta}}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{C}_1 \bar{\mathbf{a}}_1^T + \bar{C}_2 \bar{\mathbf{a}}_2^T + \bar{C}_3 \bar{\mathbf{a}}_3^T \tag{3.14-3}$$

donde:

$$\bar{\mathbf{a}}_1^T = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2^T = \frac{\partial (\bar{J}_2^{1/2})}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \{\bar{\tau}_{11}^{\mathrm{d}}, \bar{\tau}_{22}^{\mathrm{d}}, \bar{\tau}_{33}^{\mathrm{d}}, 2\bar{\tau}_{12}, 2\bar{\tau}_{23}, 2\bar{\tau}_{31}\}\frac{1}{2\sqrt{\bar{J}_2}} \tag{3.14-4}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_3^T = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \left\{ \bar{\tau}_{22}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{33}^{\mathrm{d}} - \bar{\tau}_{23}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3},\ \bar{\tau}_{11}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{33}^{\mathrm{d}} - \bar{\tau}_{13}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3},\ \bar{\tau}_{11}^{d} \bar{\tau}_{22}^{d} - \bar{\tau}_{12}^2 + \frac{\bar{J}_2}{3},\ 2\bar{\tau}_{11}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{23},\ 2\bar{\tau}_{22}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{13},\ 2\bar{\tau}_{33}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{12} \right\}$$

Las constantes $\bar{C}_i$, al igual que la forma explícita de la función de fluencia (3.13-7), están definidas según el criterio de plastificación que se adopte, el cual depende del material en estudio. Para el caso de materiales geológicos, la forma de estas constantes se verá en la sección 4.4.

Los invariantes formulados en términos de $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, serán:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \tag{3.14-5}$$

Expresándolo en función de las tensiones co-rotadas $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ se tiene:

$$\bar{I}_1 = \bar{\tau}_{ii} = J(\mathbf{R}^{\mathrm{E}})^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^{\mathrm{E}} : \mathbf{I} = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{R}^{\mathrm{E}} \mathbf{I} (\mathbf{R}^{\mathrm{E}})^T = J\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = JI_1 \tag{3.14-6}$$

El segundo invariante del tensor desviador de las tensiones de Cauchy es:

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{\mathrm{d}} \sigma_{ij}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \tag{3.14-7}$$

y en términos de la tensión corrotada $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ resulta:

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \frac{1}{2} \bar{\tau}_{ij}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{ij}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{d}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{d}} \\ &= \frac{1}{2} \left[ J(\mathbf{R}^{\mathrm{E}})^T \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \mathbf{R}^{\mathrm{E}} : J(\mathbf{R}^{\mathrm{E}})^T \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \mathbf{R}^{\mathrm{E}} \right] = \frac{1}{2} J^2 (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}) = J^2 J_2 \end{aligned} \tag{3.14-8}$$

El tercer invariante del tensor desviador de Cauchy, teniendo en cuenta la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$, es:

$$J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^{\mathrm{d}} \sigma_{jk}^{\mathrm{d}} \sigma_{ki}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}})^T = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \tag{3.14-9}$$

y expresado en términos de la tensión corrotada de Kirchhoff es:

$$\bar{J}_3 = \frac{1}{3} \bar{\tau}_{ij}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{jk}^{\mathrm{d}} \bar{\tau}_{ki}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{d}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{d}} \bar{\boldsymbol{\tau}}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{3} J^3 (\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}}) = J^3 J_3 \tag{3.14-10}$$