

CAPÍTULO
2**EL MODELO MATEMÁTICO PARA
LA CONSOLIDACIÓN DE SUELOS
NO SATURADOS.****2.1 OBJETIVOS.**

En este Capítulo se desarrolla un modelo matemático para la consolidación de suelos no saturados. Para esto, se hace referencia a otro modelo para la consolidación de este tipo de materia geológico desarrollado por Khalili & Khabbaz⁴⁰, ampliado e implementado en computador por Beneyto^{10,12}. En el apartado 2.4, el autor introduce la variación de la saturación en el tiempo (ecuación (2.4-4), no tenida en cuenta en referencia [40]) y se introducen dos nuevos casos (4 y 5) a los tres originalmente propuestos en la citada referencia; conduciendo lo anterior a un nuevo modelo, ecuación (2.5-13), que permite considerar efectos no tenidos en cuenta anteriormente y agregando la posibilidad de poder ser reducido fácilmente a otros más sencillos (como el presentado en las referencias [12] y [40]) con solo seguir lo indicado en el párrafo 2.6. El coeficiente indicado en la ecuación (2.3-7), no tenía explicitada forma alguna en las referencias consultadas, por lo que, basados en experiencias de laboratorio y el significado físico, ha sido propuesto por el Autor y el Mag. Ing. Pablo Beneyto.

2.2 DESARROLLO DEL MODELO.

El estudio de consolidación de suelos no saturados es mayormente abordado en la actualidad a través de la aplicación del método de los elementos finitos a modelos matemáticos y estos han evolucionado de manera tal que se han logrado importantes avances para predecir el comportamiento de este tipo de medio poroso con una base conceptual más fundamentada.

Desde los trabajos pioneros de Biot^{11,72}, muchos han realizado diversas propuestas para el análisis de consolidación. Específicamente para suelos no saturados, Ghaboussi et al³¹ presentaron un modelo bifásico, Lewis et al⁴⁷ desarrollaron algunos de los primitivos modelos trifásicos y Masters et al⁵⁶ introducen temperatura en modelos de suelos saturados mientras que Yang et al⁶⁸ desarrollan un modelo no saturado con inclusión del calor.

Más recientemente y basados en Hassanizadeh et al^{35,36,37}, se han abordado problemas relativos a geomecánica ambiental (Schrefler⁶³, entre otros). La ecuación constitutiva mecánica para suelos ha sido desarrollada por Alonso et al¹ y posteriormente ampliada por Khalili & Khabbaz⁴⁰ y Sun et al⁶⁴ entre otros.

Uno de los puntos controversiales en la formulación de estos modelos es el grado de saturación como elemento de acoplamiento agua - aire⁴¹ y su variación con la succión. Surge a partir de la revisión realizada, que la variación de la succión torna altamente no lineal el problema⁴¹ y provoca la pérdida de simetría de las ecuaciones para el caso isotérmico que es específicamente el objeto de este trabajo. Empero, no ha sido claramente analizado a través de las diferentes publicaciones revisadas, cuando es indispensable asumir el costo computacional por pérdida de simetría y cuan confiable son las simulaciones numéricas con la inclusión o no de esta succión variable.

Para abordar la cuestión, se podría simplemente tomar cualquier modelo entre alguno de los mencionados y eliminar en las ecuaciones de los que lo permitan, todos los términos que reflejen una variación de la succión y resolver lo que queda. Sin embargo, esta puede ser una tarea tediosa generadora de incertidumbre. Además, las ecuaciones remanentes pueden no ser válidas desde un punto de vista conceptual.

En cambio, aquí se toma en cuenta una línea diferente y que sigue la propuesta de Khalili et al⁴⁰ para el desarrollo de un modelo matemático para consolidación no saturada. Esta se basa en la combinación de diferentes estados de saturación y conduce a un sistema de ecuaciones simétricas simples. Estas, fueron depuradas e implementadas en computador usando elementos finitos con buen desempeño en ciertas circunstancias^{10,11}. A lo largo del presente trabajo, se extendió el modelo desarrollado en referencia [10] mediante la recombinación de nuevos estados y la inclusión de la variación de la saturación con la succión. Se obtiene así un modelo cuyos resultados son comparables a los obtenidos en las referencias [29] y [47], en condiciones isotérmicas pero con un desarrollo conceptual que permite discernir entre asumir o no el costo computacional por pérdida de simetría debido a la variación de la saturación.

En relación al modelo usado para describir el comportamiento mecánico del suelo, debe mencionarse que puede ser elástico o alternativamente plástico (ver apartado 4.4).

Por último es menester resaltar que el problema de flujo en medios porosos con o sin transporte de masa es de gran importancia en muchas disciplinas de la ingeniería. El análisis de este tipo de fenómenos, sin considerar efectos térmicos, es de relevancia para el estudio de estabilidad en edificios y otras estructuras civiles como presas de tierra en el área comprendida por la región N.E. de Argentina, sur de Paraguay y S.O. de Brasil. Por esta razón resulta de sumo interés rescatar los valores de formulaciones simples y especialmente si estas pueden conservar la simetría del sistema de ecuaciones que ahorrará costo computacional en cualquier caso.

En función del modelo presentado, se ha desarrollado un código que ha permitido verificar cuales serían las condiciones más adecuadas para continuar usando modelos simples simétricos y cuales obligarían al uso de modelos más complejos. Cabe agregar que si bien el mercado ofrece códigos muy conocidos entre lo que podemos citar a Abaqus, Cleo, Code_Aster, Compass, Rockflow, etc., la decisión de desarrollar uno se ha apoyado en la posibilidad de realizar modificaciones demandadas por problemas locales particulares y porque facilita las actividades de investigación con nuevas implementaciones.

2.3 ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

2.3.1 Equilibrio mecánico

Para describir la relación tensión-deformación en un suelo no saturado, se considera un volumen representativo de suelo sujeto a una tensión externa total de Cauchy cuyas componentes σ_{ij} . El estado de tensiones en este volumen de suelo debe satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \quad \text{con } i, j=1,2,3 \quad (2.3-2)$$

Extendiendo el concepto de tensiones efectivas^{32,63} de Terzaghi⁶⁵ a suelos no saturados y considerando los efectos de las presiones de agua y aire en los poros, la tensión total con componentes σ_{ij} y la tensión efectiva de Cauchy con componentes σ'_{ij} , pueden relacionarse en forma incremental según la siguiente expresión:

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} - a_1 dp^w \delta_{ij} - a_2 dp^g \delta_{ij} \quad (2.3-3)$$

siendo dp^w y dp^g diferenciales de presión de los poros de agua y aire respectivamente, α_1 y α_2 los parámetros de tensión efectiva para las fases agua y aire y δ_{ij} delta de Kronecker. Se obtuvo, a partir de la descomposición del estado general de tensiones en la suma de tensiones efectivas y presiones del poro, la siguiente forma de la ecuación de equilibrio mecánico⁴⁰:

$$\sigma'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \alpha_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - \alpha_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \quad (2.3-4)$$

con

$$\alpha_1 = \frac{c_m}{c} - \frac{c_s}{c} \quad (2.3-5)$$

donde

$$\alpha_2 = 1 - \frac{c_m}{c} \quad (2.3-6)$$

$c_m = \frac{1}{K_m}$: Compresibilidad de la estructura de suelo con respecto a un cambio en la succión p^c . ($p^c = p^g - p^w$)

$c = \frac{1}{K_T}$: Compresibilidad drenada de la estructura de suelo

$c_s = \frac{1}{K_s}$: Compresibilidad de los granos de sólido

$K_T = (1-\alpha).K_s$: Módulo volumétrico del esqueleto⁴⁷ y “ α ” coeficiente de Biot¹².

Originalmente Khalili & Khabbaz⁴⁰ no explicitan K_m . Para el presente trabajo se propone la siguiente expresión del valor de la compresibilidad de la estructura de suelo ante un cambio en la succión, basados en estudios experimentales^{40,63}:

$$K_m = \frac{K_T K_s}{S_w K_s + S_g K_T} \quad (2.3-7)$$

siendo S_w (recordar que $S_w = S_w(p^c)$) y S_g las saturaciones correspondientes a las fases agua y aire, respectivamente, y cuyas expresiones son $S_w = V_w/V_v$ y $S_g = V_g/V_v$ con V_w siendo el volumen del poro de agua, V_g el volumen del poro de aire y V_v el volumen de vacíos. La (2.3-7) cumple con las restricciones impuestas⁴⁰ dado que $S_w \rightarrow 1$ cuando el coeficiente $K_m \rightarrow K_T$.

2.3.2 Modelo de flujo I: Fase Agua

El flujo de agua en suelos saturados y no saturados puede describirse mediante una combinación de la Ley de Darcy y de la ley de conservación de la masa de fluido.

Según Darcy⁴⁵ se tiene que:

$$v_{wi} = -\frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \quad (2.3-8)$$

Siendo k_{wi} la permeabilidad intrínseca de la fase agua, v_{wi} la velocidad relativa de descarga del agua y γ_w densidad del agua, debiendo satisfacer además la continuidad de la masa de fluido dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^w n_w v_{ei}) = \frac{\partial}{\partial t} (n_w \rho^w) \quad (2.3-9)$$

expresión en la cual v_{ei} representa a la velocidad absoluta de agua en la estructura de suelo y $n_w = V_w/V$ a la porosidad relativa al agua. Además, $v_{wi} = n_w (v_{ei} - v_{si})$ con $v_{si} = \dot{u}_i$.

A partir de las expresiones anteriores, y luego de aplicar la derivada lagrangiana total con respecto a sólidos en movimiento ($\frac{d(\bullet)}{dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + v_{si} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i}$), se obtiene⁴⁰:

$$-\frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho^w v_{wi}) = n_w \frac{1}{\rho^w} \frac{d\rho^w}{dt} + \frac{dn_w}{dt} + n_w \frac{\partial v_{si}}{\partial x_i} \quad (2.3-10)$$

Introduciendo en la expresión anterior la definición de compresibilidad del fluido. Después de una serie de operaciones algebraicas, se puede escribir que:

$$-\frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = -n_w c_f \frac{dp^w}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_w}{dt} \quad (2.3-11)$$

2.3.3 Modelo de flujo II: Fase Aire

El flujo de aire a través de un suelo no saturado es a menudo descrito usando la Ley de Fick (detalles en apartado 1.6.2). De acuerdo a la mencionada, la tasa de masa transferida por una

sustancia por difusión a través de un área unitaria J_{gi} , es proporcional al gradiente de concentración de la sustancia C .

Estos términos pueden relacionarse a través del coeficiente de difusión D_i mediante la siguiente ley²⁹:

$$J_{gi} = -D_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (2.3-12)$$

Para condiciones isotérmicas, y teniendo en cuenta la concentración de aire con respecto a una unidad de volumen de suelo, se puede obtener una forma modificada de la ley de Fick, dada por:

$$J_{gi} = -D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \quad (2.3-13)$$

definiendo al coeficiente de transmisión para la fase aire como:

$$D_i^* = D_i \frac{w_g}{RT} (1 - S_w) (n_w + n_g) = D_i \frac{w_g}{RT} S_g (n_w + n_g) \quad (2.3-14)$$

Donde w_g es el peso molecular de la masa de aire, R la constante universal de los gases, T la temperatura absoluta y $n_g = V_g/V$ la porosidad del aire. Usando la definición de J_{gi} , satisfaciendo la conservación de la masa de aire, y siguiendo exactamente los mismos procedimientos que para la fase agua se tiene⁴⁰:

$$-\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = -\frac{n_g}{P} \frac{dp^g}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV_g}{dt} \quad (2.3-15)$$

donde P es presión atmosférica.

Las ecuaciones (2.3-11) y (2.3-15) son las que describen el flujo de agua y aire a través de un medio poroso no saturado. Nótese que existen 2 ecuaciones y 4 incógnitas (p^w, p^g, V_w y V_g), por lo tanto se necesitan dos ecuaciones adicionales, las cuales pueden obtenerse relacionando

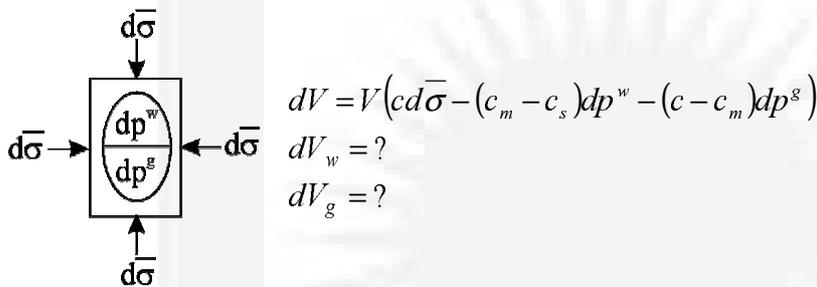
$\frac{dV_g}{dt}$ y $\frac{dV_w}{dt}$ a las variables primarias p^w, p^g y a las componentes de desplazamientos “u”.

Esto supone habilitar las ecuaciones (2.3-4), (2.3-11) y (2.3-15) para resolverlas simultáneamente.

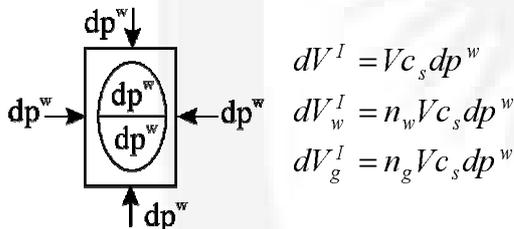
2.4 DEFORMACIÓN DEL PORO DE AGUA Y DEL PORO DE AIRE.

Para establecer las relaciones requeridas entre $\frac{dV_w}{dt}$ y las variables primarias de fluido, Khalili & Khabbaz⁴⁰, consideran un volumen representativo de medio poroso no saturado sujeto a las siguientes condiciones:

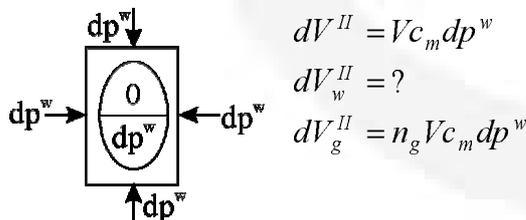
CASO (1)



CASO (2)



CASO (3)



El caso (1) corresponde a una presión isotrópica externa de $d\bar{\sigma}$, una presión interna de agua dp^w , y una presión interna de aire dp^g .

El caso (2) se refiere a presiones externas e internas iguales a dp^w .

El caso (3) corresponde a una presión externa y de poro de aire iguales a dp^w , y presión del agua igual a cero.

A partir de este análisis, y luego de aplicar el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (2)], [(1) - (3)], y [(2) - (3)], Khalili y Khabbaz⁴⁰ obtienen la siguiente relación:

$$\frac{dV_w}{V} = \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) d\bar{\sigma} - \left[(1-n_g) \frac{1}{K_m} - (1+n_w-n_g) \frac{1}{K_s} \right] dp^w - n_g \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) dp^g \quad (2.4-1)$$

la cual puede ser desarrollada según las siguientes expresiones:

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \varepsilon_{ii} + \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) (\alpha - n) S_g dp^g - \left[\frac{S_w}{K_s} (\alpha - n) + S_g (\alpha - n) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_s} \right) \right] dp^w \quad (2.4-2)$$

$$\frac{dV_w}{V} = \alpha S_w \varepsilon_{ii} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w S_w dp^w + S_g S_w dp^g) + \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_g S_w (dp^g - dp^w) \quad (2.4-3)$$

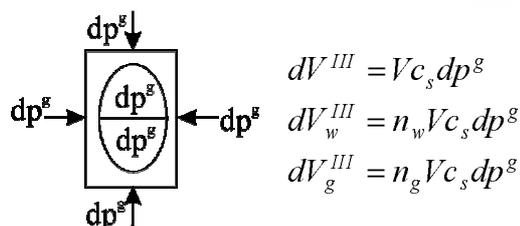
Una expresión equivalente a la anterior fue obtenida en la referencia [40]. También, en esa referencia se realiza el reemplazo de (2.4-3) en la ecuación (2.3-11). Sin embargo, allí no se tomó en cuenta la variación de la saturación con el tiempo. Ahora, agregando este tópico, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{n S_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha - n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\varepsilon}_{ii} - \frac{\alpha - n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & - \left(\frac{\alpha - n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha - n}{K_s} S_w dp^g \right) \dot{S}_w + S_w \frac{\alpha - n}{K_T} (S_g \dot{p}^c + dp^c \dot{S}_g) = 0 \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

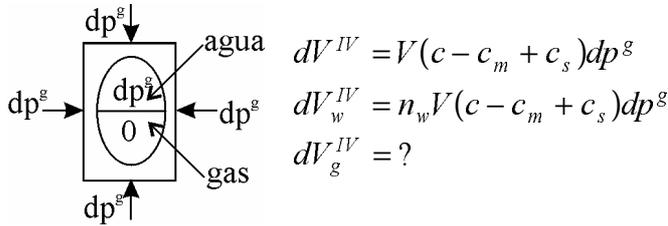
donde $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$ y n es la porosidad ($n = \frac{n_g}{S_g} = \frac{n_w}{S_w}$).

Al incorporar la tasa de saturación, la deducción de la ecuación para el aire requiere de dos nuevos estados en relación a la referencia [40]:

CASO (4)



CASO (5)



El caso (4) se refiere a presiones externas e internas iguales a dp^g .

El caso (5) corresponde a una presión externa y de poro de agua iguales a dp^g , y presión del aire igual a cero.

A partir de este nuevo análisis, aplicando el teorema de reciprocidad a los casos [(1) - (4)], [(1) - (5)], y [(4) - (5)], se obtienen las siguientes relaciones:

$$(dV - dV_w)dp^g = -dV_g^{IV} dp^g + V((c - c_m + c_s)d\bar{\sigma} - n_w(c - c_m + c_s)dp^w)dp^g \quad (2.4-5)$$

$$V(c - c_m + c_s)(dp^g - n_w dp^g)dp^g - dV_g^{IV} dp^g = V(c_s dp^g - n_w c_s dp^g)dp^g \quad (2.4-6)$$

$$(dV - dV_w - dV_g)dp^g = Vc_s dp^g d\bar{\sigma} - n_w Vc_s dp^g dp^w - n_g Vc_s dp^g dp^g \quad (2.4-7)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.4-5) a (2.4-7) para dV_g , se puede obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{dV_g}{V} = (c_m - c_s)d\bar{\sigma} - [(1 - n_w)c_m - (1 - n_w + n_g)c_s]dp^g - n_w(c_m - c_s)dp^w \quad (2.4-8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_g}{V} &= \alpha S_g \epsilon_{ii} + ((c - c_m)\alpha S_w - n S_w(c - c_m))dp^w \\ &+ ((c - c_m)\alpha S_g + c_s n S_g - c(1 - n S_w) + c_m(1 - n S_w))dp^g \end{aligned} \quad (2.4-9)$$

$$\frac{dV_g}{V} = S_g \left[\alpha \epsilon_{ii} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} (S_w dp^w + S_g dp^g) - \frac{(\alpha - n)}{K_T} S_w dp^c \right] \quad (2.4-10)$$

Reemplazando en la ecuación (2.3-15) y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) &= -\frac{nS_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\
 -\frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left(S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) &
 \end{aligned} \quad (2.4-11)$$

2.5 EL MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO

Para crear un sistema de ecuaciones que pueda ser resuelta aplicando MEF, es necesario realizar algunas transformaciones sobre (2.3-4), (2.4-4) y (2.4-11) a fines de homogeneizar las incógnitas.

EQUILIBRIO MECÁNICO: recordando la ecuación (2.3-4) se tiene que:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - a_1 \dot{p}^w \delta_{ij} - a_2 \dot{p}^g \delta_{ij} \quad (2.5-1)$$

Considerando en esta etapa solo pequeños desplazamientos y deformaciones, la relación tensión deformación puede expresarse:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \text{con} \quad \dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \dot{u}_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.5-2)$$

Inicialmente, no se impondrán restricciones a la relación constitutiva C_{ijkl} , es decir, podrá ser elástica o plástica. La ecuación de equilibrio (2.3-2) en tasas es:

$$\nabla \dot{\sigma}'_{ij} + \dot{F}_i = 0 \quad (2.5-3)$$

Combinando (2.5-1), (2.5-2) y (2.5-3), se obtiene la ecuación que gobierna la deformación en sólidos en términos de tasa:

$$\nabla(C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) + a_1 \nabla \dot{p}^w + a_2 \nabla \dot{p}^g + \dot{F}_k = 0 \quad (2.5-4)$$

FASE AGUA: operando a partir de la (2.4-4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\
 - \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dt} + S_w \frac{\alpha-n}{K_T} \left(S_g \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (2.5-5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_w}{K_w} \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 \dot{p}^w + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & - \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} \dot{p}^c + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left(S_g \dot{p}^c - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \dot{p}^c \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5-6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} - \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 + \frac{nS_w}{K_w} \right) \dot{p}^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w \dot{p}^g \\ & + \left[- \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \dot{p}^c = 0 \end{aligned} \quad (2.5-7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w^2 + \frac{nS_w}{K_w} \right) + \left[- \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \quad (2.5-8) \\ & - \left\{ \frac{\alpha-n}{K_s} S_g S_w - \left[- \left(\frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^w - \frac{\alpha-n}{K_s} S_w dp^g \right) \frac{dS_w}{dp^c} + \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^g = 0 \end{aligned}$$

quedando finalmente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) + \alpha S_w \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \frac{nS_w}{K_w} - \left[\frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w \left(dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_w - dp^g \frac{dS_w}{dp^c} \right) - \frac{(\alpha-n)}{K_T} S_w \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \quad (2.5-9) \\ & - \left\{ \frac{\alpha-n}{K_s} S_w \left[S_g - (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} \right] - \frac{\alpha-n}{K_T} S_w \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right\} \dot{p}^g = 0 \end{aligned}$$

FASE AIRE: las ecuaciones constitutivas correspondientes a esta fase pueden obtenerse a partir de operaciones algebraicas sobre (2.4-11) lo que significa que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) - \frac{nS_g}{P} \dot{p}^g + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g^2 \dot{p}^g \\ & - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dt} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_g}{dt} - S_g \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left(S_w \dot{p}^c + dp^c \frac{dS_g}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5-10)$$

haciendo: $\frac{dS_w}{dt} = \frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt}$ y $\frac{dS_g}{dt} = \frac{dS_g}{dp^c} \frac{dp^c}{dt} = -\frac{dS_w}{dp^c} \frac{dp^c}{dt}$

se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w S_g \dot{p}^w - \left(\frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g^2 \right) \dot{p}^g \\ & \left[\frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^g \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g dp^w \frac{dS_w}{dp^c} - S_g \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \dot{p}^c = 0 \end{aligned} \quad (2.5-11)$$

Realizando la descomposición $\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^w$, puede expresarse la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) + \alpha S_g \dot{\epsilon}_{ii} \\ & - \left\{ \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_w S_g + S_g \left[\frac{(\alpha-n)}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right\} \dot{p}^w \\ & - \left(\frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha-n)}{K_s} S_g^2 - S_g \left[\frac{(\alpha-n)}{K_s} (dp^g - dp^w) \frac{dS_w}{dp^c} - \frac{(\alpha-n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \right] \right) \dot{p}^g = 0 \end{aligned} \quad (2.5-12)$$

Finalmente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que representan un modelo matemático para la formulación del problema de consolidación en suelos no saturados:

$$\left. \begin{aligned} & \nabla(C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) + a_1 \nabla \dot{p}^w + a_2 \nabla \dot{p}^g + \dot{F}_k = 0 \\ & a_1 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{11} \dot{p}^w - a_{12} \dot{p}^g + \frac{1}{\rho^w} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^w \frac{k_{wi}}{\gamma_w} \frac{\partial p^w}{\partial x_i} \right) = 0 \\ & a_2 \dot{\epsilon}_{ii} - a_{21} \dot{p}^w - a_{22} \dot{p}^g + \frac{1}{\rho^g} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i^* \frac{\partial p^g}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5-13)$$

donde los coeficientes valen:

$$\begin{aligned}
 & : \quad a_1 = \alpha S_w \\
 & \quad a_2 = \alpha S_g \\
 & \quad a_{11} = \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^w \right\} \\
 & \quad a_{12} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_w \left(S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^w \right\} \\
 & \quad a_{21} = \left\{ \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_w + (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) + C_s^g \right\} \\
 & \quad a_{22} = \left\{ \frac{nS_g}{P} + \frac{(\alpha - n)}{K_s} S_g \left(S_g - (dp^g - dp^w) \frac{C_s}{n} \right) - C_s^g \right\}
 \end{aligned}$$

y siendo:

$$\begin{aligned}
 C_s &= n \frac{dS_w}{dp^c} \\
 C_s^w &= -S_w \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_g - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right) \\
 C_s^g &= -S_g \frac{(\alpha - n)}{K_T} \left(S_w - dp^c \frac{dS_w}{dp^c} \right)
 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones acoplado no simétrico deducido a partir de combinación de estados que permite modelar el comportamiento del suelo no saturado ante el fenómeno de consolidación, con la posibilidad de ser reducido a otros mas simples conservando una base conceptual.

2.6 APLICABILIDAD GENERAL.

Para analizar la confiabilidad de la formulación obtenida en el párrafo 2.5, es conveniente intentar simular casos límites. En primer lugar, se trata la situación en que los valores de los coeficientes se adaptan al caso de granos incompresibles y saturación total:

$$\text{Si } S_w = 1 \Rightarrow a_1 = \alpha, \quad a_2 = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0, \quad a_{11} = \frac{nS_w}{K_w} - \frac{(\alpha - n)}{K_s} \quad (2.6-1)$$

Estos valores aplicados al sistema (2.5-13), conduce a un sistema de ecuaciones que coincide con los obtenidos para el caso saturado^{23,24,40}.

Se considera ahora el caso general (no saturado), pero cuando la saturación no varía con respecto a la succión (o al tiempo):

$$a_1 = \alpha S_w \quad , \quad a_2 = \alpha S_g \quad (2.6-2)$$

$$a_{11} = \left\{ \frac{nS_w}{K_w} + (\alpha - n)S_w \left[\frac{S_w}{K_s} + \frac{S_g}{K_T} \right] \right\}, \quad a_{22} = \left\{ \frac{nS_g}{P} + (\alpha - n)S_g \left(\frac{S_g}{K_s} + \frac{S_w}{K_T} \right) \right\} \quad (2.6-3)$$

$$a_{12} = a_{21} = \left\{ (\alpha - n)S_w S_g \left(\frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_T} \right) \right\} \quad (2.6-4)$$

que son valores idénticos a los obtenidos en formulaciones simétricas, fáciles de implementar^{12,40}. Este punto es fundamental porque pone en evidencia que al tener en cuenta la variación de la saturación con la succión, se pierde la simetría del problema isotérmico.